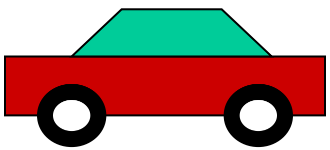
Cinematica del punto (o particella)

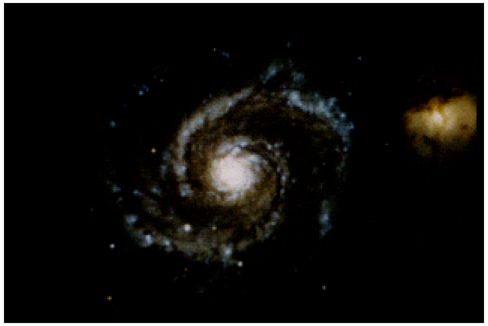
Meccanica: studia il moto dei corpi e le leggi che lo governano.
Cinematica: descrizione del moto. Studio del movimento a prescindere dalle cause.
Alcune relazioni dipendono solo dalle definizioni

Moto del **punto**: è il più semplice possibile. Non è una limitazione perché:

- un oggetto «piccolo» (<< della scala dei moti) si può approssimare con un punto;
- il moto di un punto può essere rappresentativo di tutto il sistema (moto traslatorio);
- un corpo esteso si può suddividere in parti abbastanza piccole: insieme di punti;
- in ogni sistema materiale si può definire un punto notevole (centro di massa) che, anche da un punto di vista dinamico, si muove come un “punto materiale”.

sono approssimabili con un punto:

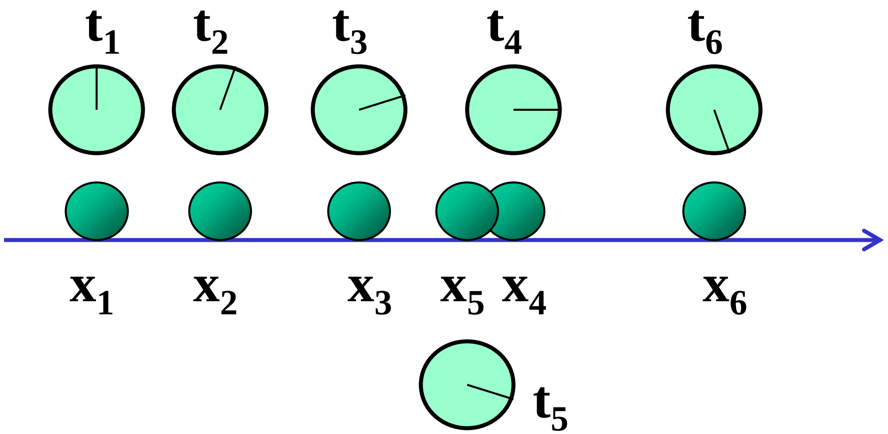




Purché sia soddisfatta una delle condizioni precedenti.

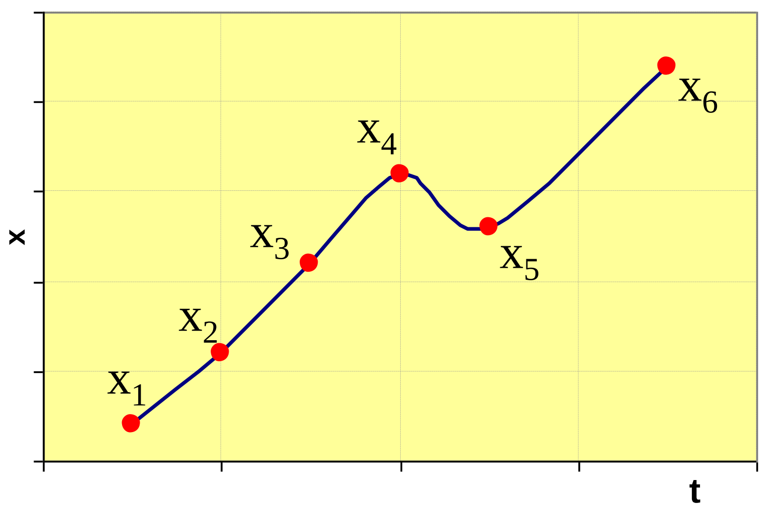
Cinematica del punto. Moto in 1D (moto lungo una retta)

Moto 1D: un solo parametro definisce la posizione.



Una descrizione completa del moto è la «legge oraria» $x(t)$.

Per descrivere il moto serve un sistema di coordinate (scelta arbitraria: origine e verso) e un cronometro, di cui si sceglie l'istante iniziale.



Rappresentazione in un grafico posizione-tempo

come si interpreta il grafico?

- pendenza positiva o negativa
- massimi e minimi
- che significato ha la pendenza?

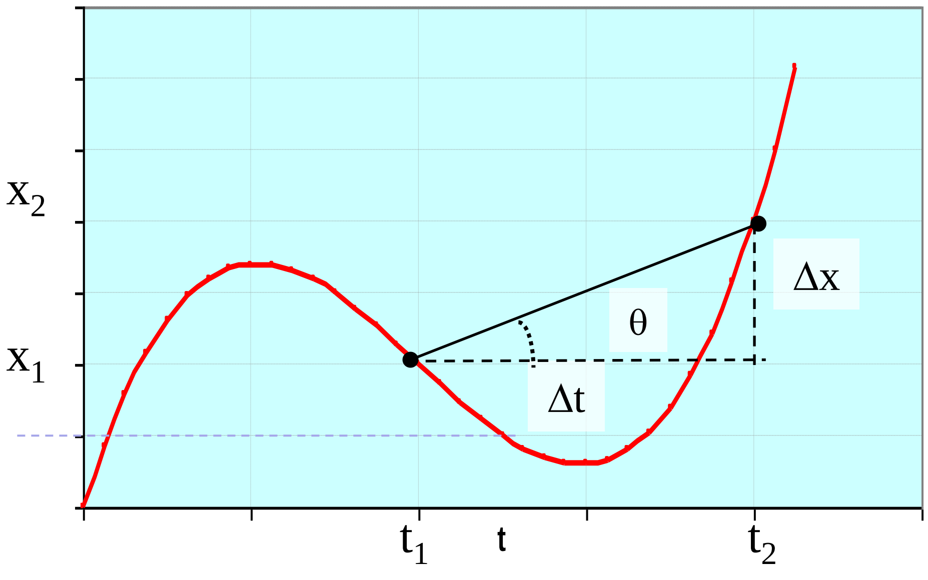
Velocità media

$$\langle \mathrm{v} \rangle = \frac{\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1}{\mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\overbrace{\text{differenza di posizione}}^{\text{spostamento}}}{\text{tempo trascorso}}$$

$$\dim v = \frac{m}{s}$$

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \tan\theta$$

pendenza del segmento congiungente i due punti nel grafico x(t)



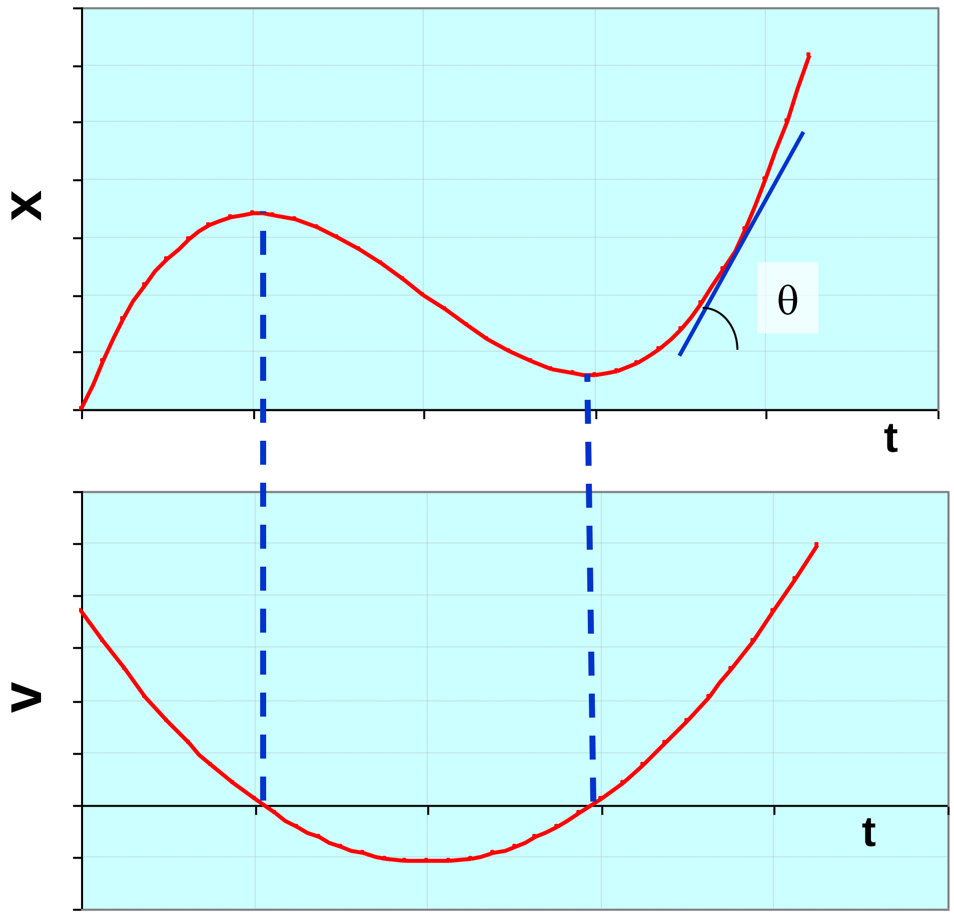
$$\Delta x = \langle v \rangle \, \Delta t$$

Attenzione !

può dare risultati anti-intuitivi.

In generale, la velocità media non ci basta: vogliamo una velocità “istantanea”

Velocità istantanea - definizione



Velocità media nel limite per $\Delta t \mapsto 0$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Derivata della posizione rispetto al tempo

geometricamente: tangente alla curva x(t)

Se non si specifica «velocità» significa velocità istantanea

Velocità istantanea – problema inverso

Ricavare la posizione x(t) nota la velocità v(t)

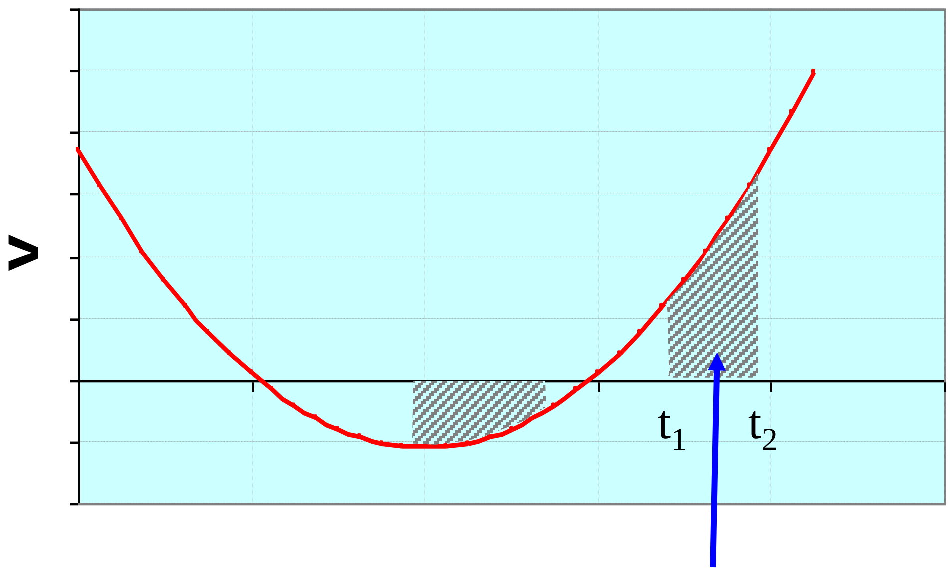
$$dx = v\,dt$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \int_{t1}^{t2} v(t)\,dt$$

Legge oraria:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt'$$

avendo definito $x_0 = x(t_0)$



Significato dell'area sottesa nel grafico v(t)

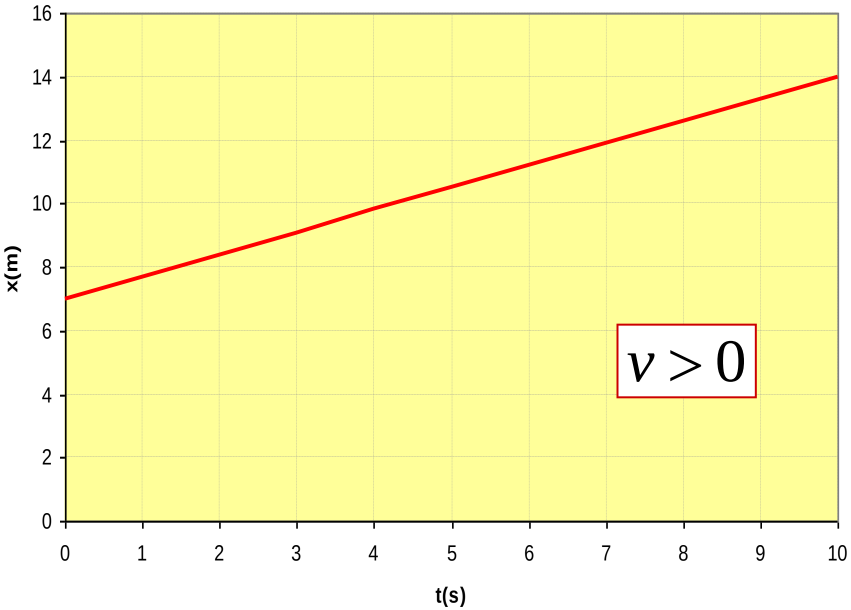
Osservazione: per ricavare x(t) non basta conoscere v(t), serve anche la posizione in un certo istante.

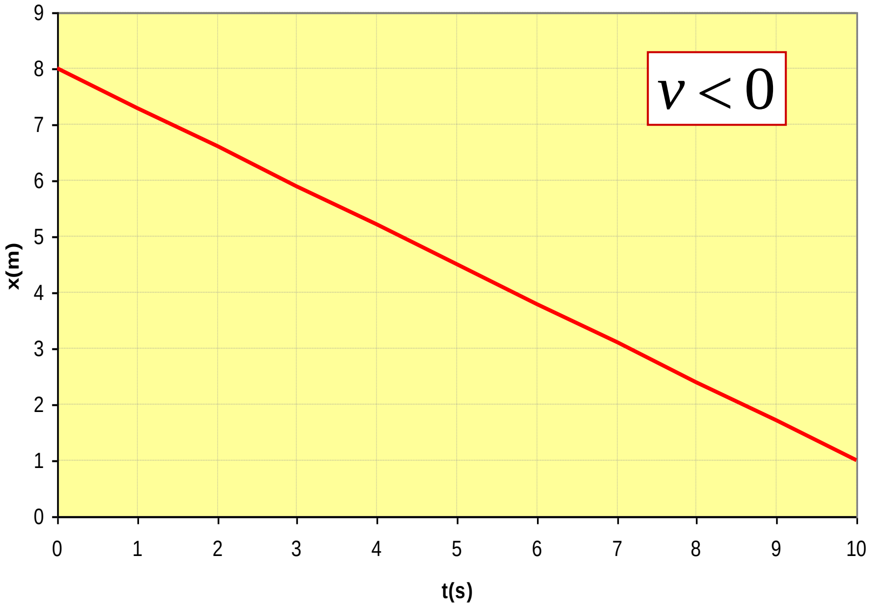
area "positiva": spostamento positivo
area "negativa" spostamento negativo

Moto uniforme (velocità costante)

caratteristico di un corpo su cui non agiscono forze

legge oraria: $$x(t) = x_0 + v(t - t_0)$$





se $t_0 = 0$ e $x(0) = x_0$ $$x(t) = x_0 + vt$$

Accelerazione - definizione

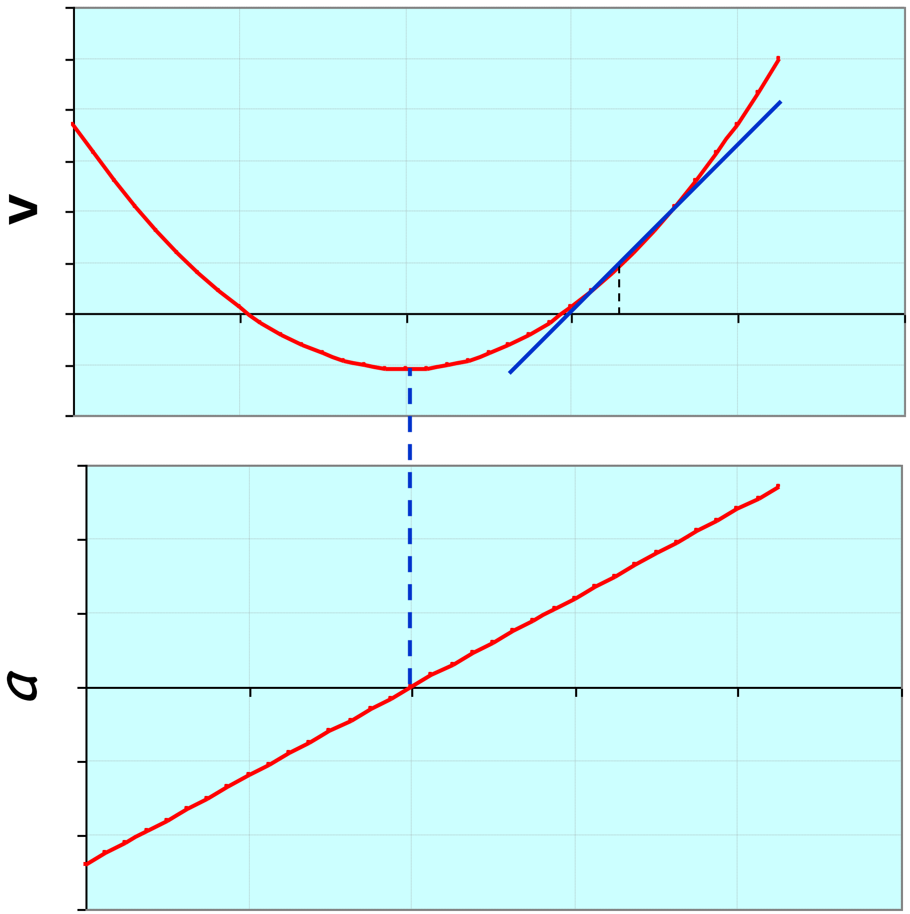
Analogamente si definiscono accelerazione media e accelerazione istantanea.

$$\langle a \rangle = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\dim a = \frac{m}{s^2}$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$



derivata 1ª della velocità
derivata 2ª della posizione
rispetto al tempo

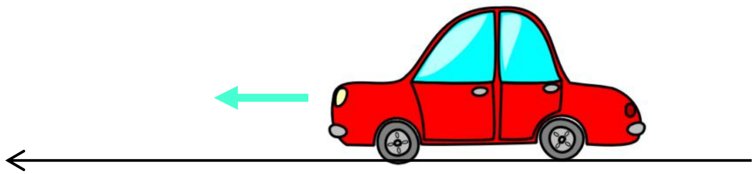
«accelerazione» senza specificare vuol dire accelerazione istantanea

Qual è il significato del segno?

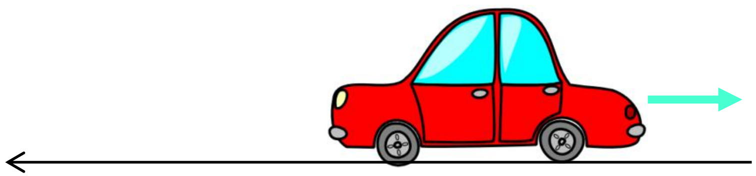
Accelerazione – discussione sul segno

determinare il segno di v e di a nei seguenti casi se il conducente

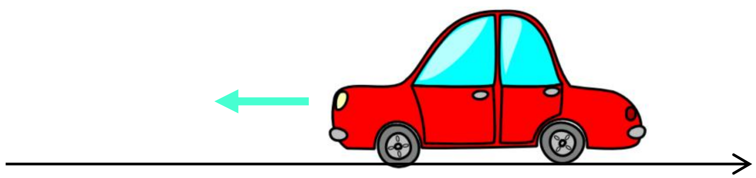
1. preme l'acceleratore
2. preme il freno



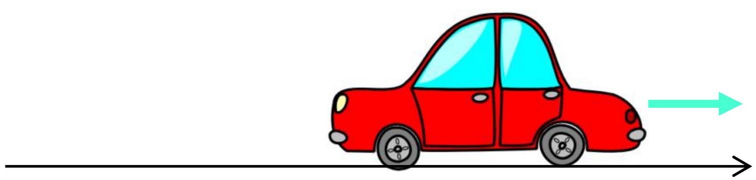
1. $v > 0 \qquad a > 0$
2. $v > 0 \qquad a < 0$



1. $v < 0 \qquad a < 0$
2. $v < 0 \qquad a > 0$



1. $v < 0 \qquad a < 0$
2. $v < 0 \qquad a > 0$



1. $v > 0 \qquad a > 0$
2. $v > 0 \qquad a < 0$

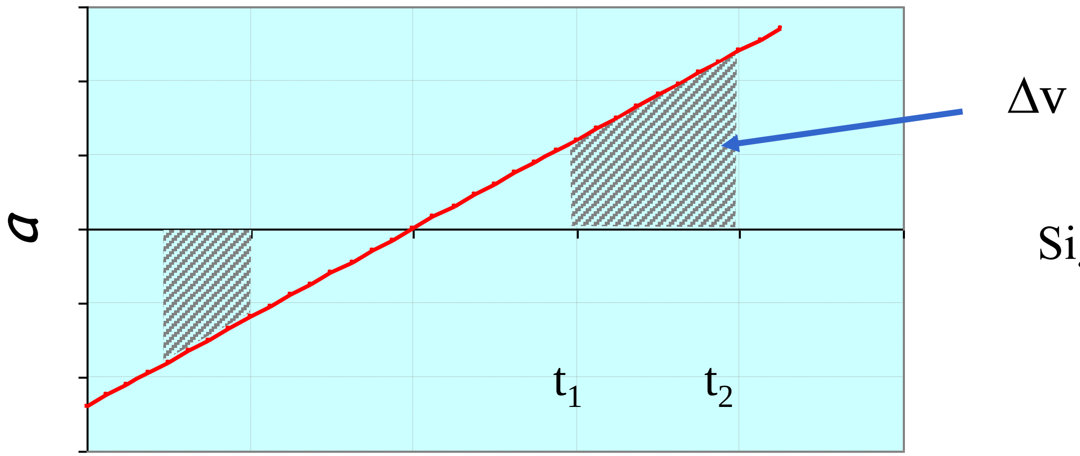
moto «accelerato»: a e v hanno lo stesso segno

moto «decelerato»: a e v hanno segno opposto

Accelerazione – problema inverso

data a(t) trovare v(t) $\quad dv = a dt \quad \Rightarrow \quad v(t_2) - v(t_1) = \Delta v = \int_{t1}^{t2} a(t)dt$

posto $\quad v(t_0) = v_0 \quad$ $\boxed{v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t')dt'}$



Significato dell'area sottesa.

Moto uniformemente accelerato (accelerazione costante)

caratteristico di un corpo soggetto ad una forza costante

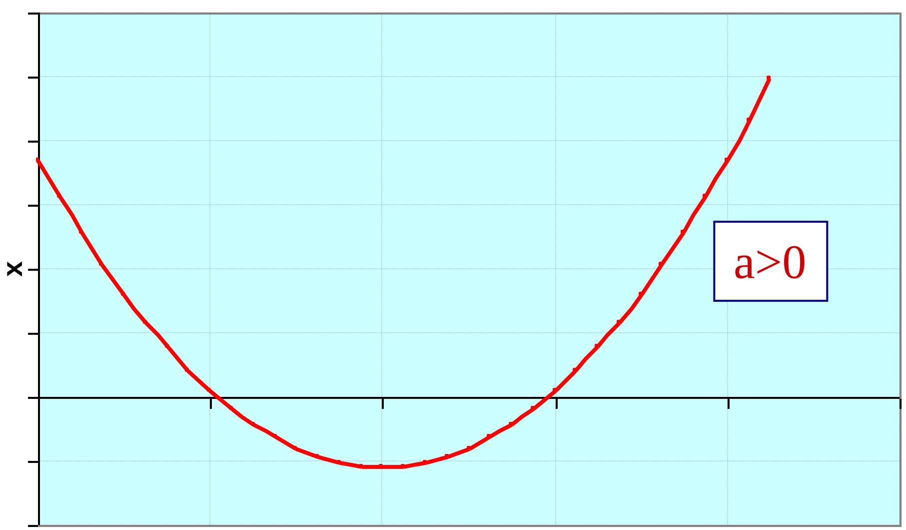
$$v(t) = v(t_0) + a(t - t_0)$$

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0)\cdot(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2$$

«condizioni iniziali»

se si pone $\begin{cases} t_0 = 0 \\ x(0) = x_0 \\ v(0) = v_0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t + \dfrac{a}{2} t^2 \\ v(t) = v_0 + at \end{cases}$$



altra relazione utile:

$$v_f^2 - v_i^2 = 2a\Delta x$$

Accelerazione, velocità, posizione
riassunto

E' possibile risalire dall'accelerazione a(t) alla posizione x(t) a patto di conoscere velocità e posizione in un particolare istante (generalmente i valori iniziali)

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t)dt \qquad x(t) = x(t_0) + \int_{t0}^{t} v(t)dt$$

spesso si assume t_0=0, e si pone $v_0 = v(0)$ $x_0 = x(0)$ da cui

$$\boxed{v(t) = v_0 + \int_0^t a(t)dt} \qquad \boxed{x(t) = x_0 + \int_0^t v(t)dt}$$

costanti di integrazione (valori «iniziali»)

Moto armonico.

caratteristico di un corpo soggetto ad una forza elastica

Un moto si dice armonico (intorno all'origine) se la legge del moto si può scrivere:

$$x(t) = \underset{\text{ampiezza}}{A}\sin\underbrace{(\omega t + \phi)}_{\text{fase}}$$

ϕ fase iniziale

ω pulsazione o frequenza ciclica

$$[\omega] = \frac{rad}{s} = s^{-1}$$

Moto periodico, con periodo: $\omega T = 2\pi$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

frequenza

$$[\nu] = \frac{1}{s} = s^{-1}$$

moto armonico intorno alla posizione x_0:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) + x_0$$

Moto armonico.

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

Definizioni equivalenti:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi')$$

$$x(t) = B\sin\omega t + C\cos\omega t$$

purché le costanti abbiano i seguenti valori:

$$\phi' = \phi - \pi/2$$

$$B = A\cos\phi \qquad C = A\sin\phi$$

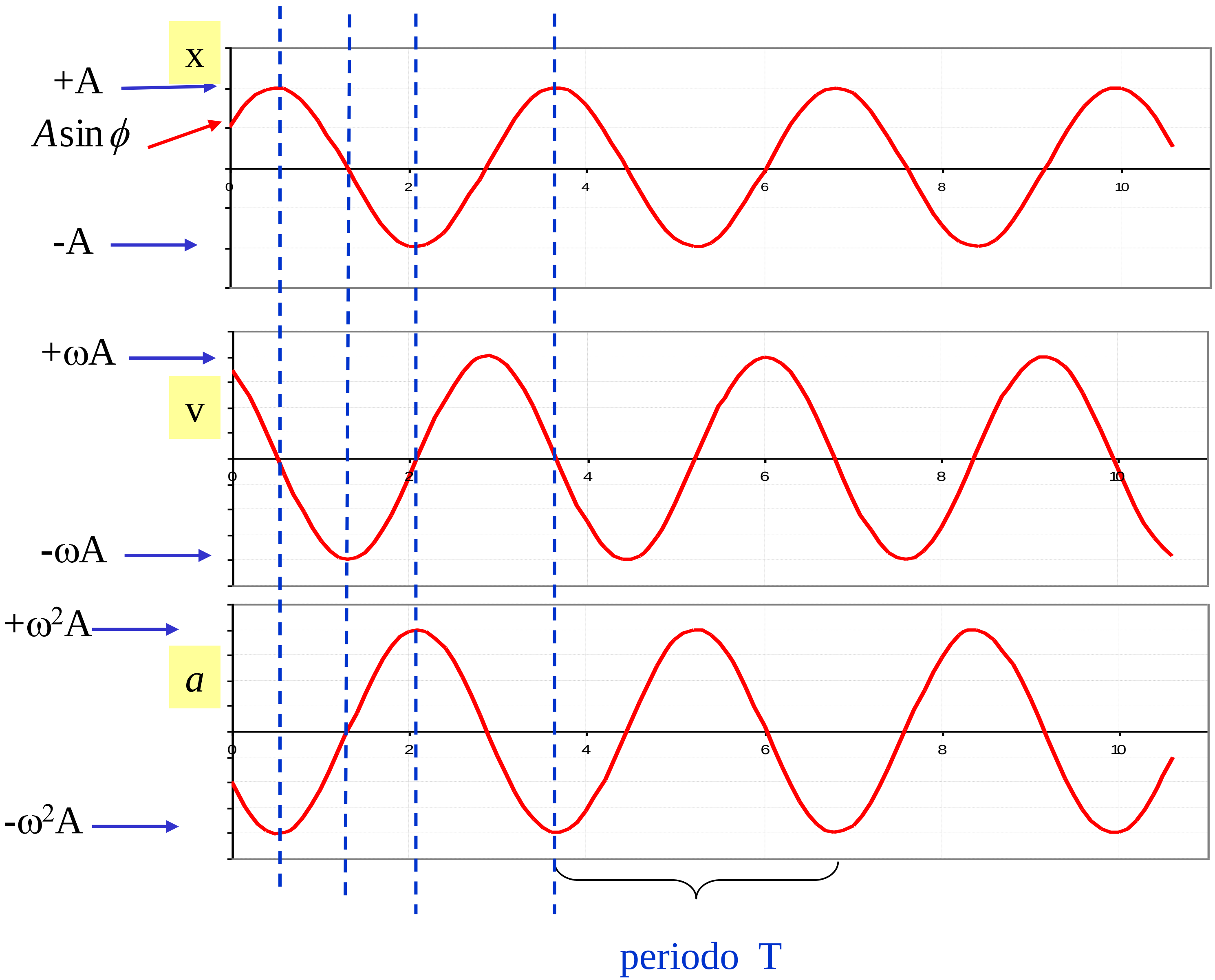
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \phi) \longrightarrow \quad a = -\omega^2 x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

Equazione del moto armonico

Moto armonico.



Moto rettilineo uniformemente smorzato.

caratteristico di un corpo soggetto a forza viscosa

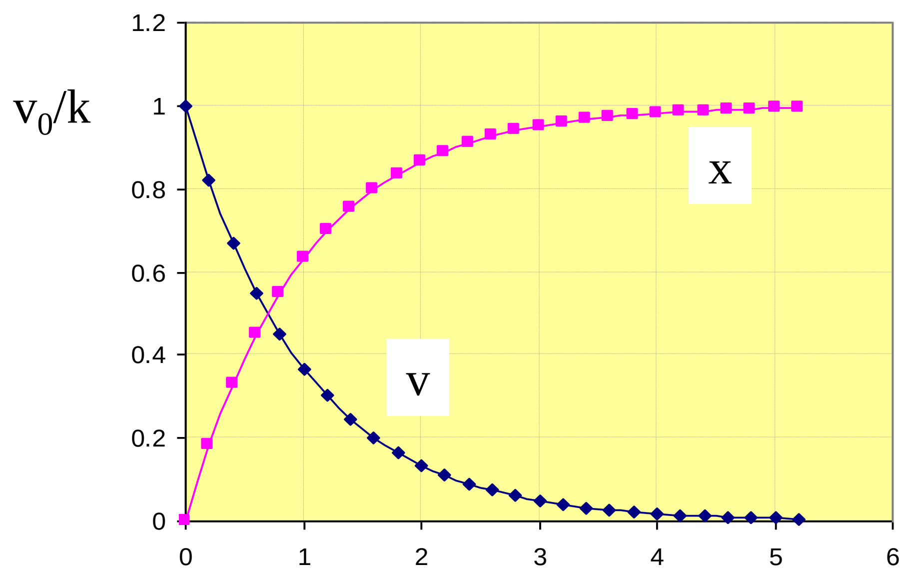
Moto che soddisfa l'equazione $$\frac{dv}{dt} = -kv$$ (k costante positiva)

per separazione delle variabili:

$$\frac{dv}{v} = -kdt \quad \Rightarrow \int_{v0}^{v} \frac{dv}{v} = -k\int_{0}^{t} dt \quad \Rightarrow \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -kt \quad \Rightarrow v(t) = v_0 \exp(-kt)$$

$$x(t) = \frac{v_0}{k}\left[1 - \exp(-kt)\right]$$

Il "tempo caratteristico" è $$\tau = \frac{1}{k}$$



Velocità e accelerazione in funzione della posizione

$$a\,dx = a\,v\,dt \;\Rightarrow\; \boxed{a\,dx = v\,dv} \;\Rightarrow\; \boxed{\int_{x_0}^{x} a\,dx = \frac{v^2 - v_0^2}{2}}$$

vdt $\quad$ adt

Formula generale

In un moto uniformemente accelerato:

$$a = \text{cost} \qquad v(x)^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$$

In un moto armonico semplice:

$$a = -\omega^2 x \qquad v(x)^2 - v_0^2 = \omega^2 (x_0^2 - x^2)$$

In un moto esponenzialmente smorzato:

$$a = -kv \qquad v(x) - v_0 = -k(x - x_0)$$