Grandezze vettoriali.

Descrizione matematica: l'ente matematico vettore

"I concetti nuovi e fecondi di somma di vettori, prodotti di vettori ecc. sono applicati alla meccanica ....
Secondo [l'autore] il vantaggio maggiore del [metodo] consiste nel fatto che il calcolo è in ogni passaggio la precisa espressione del procedimento mentale.
Questo non è possibile quando si usa il metodo abituale che introduce tre coordinate arbitrarie. La differenza fra l'analisi e la sintesi scompare, e i vantaggi dei due metodi sono così riuniti. "

Da E.Mach, "La meccanica nel suo sviluppo storico critico", 1883.
(Trad. it. Boringhieri, Torino, 1977) con riferimento ai lavori di H.Grassmann (1844), A.J.Möbius (1827), W.R.Hamilton (1866).

Grandezze scalari e vettoriali

App. C del libro di testo

Distanza, massa, temperatura ... sono completamente definite da 1 numero (+ unità misura)
Invarianti per rotazioni

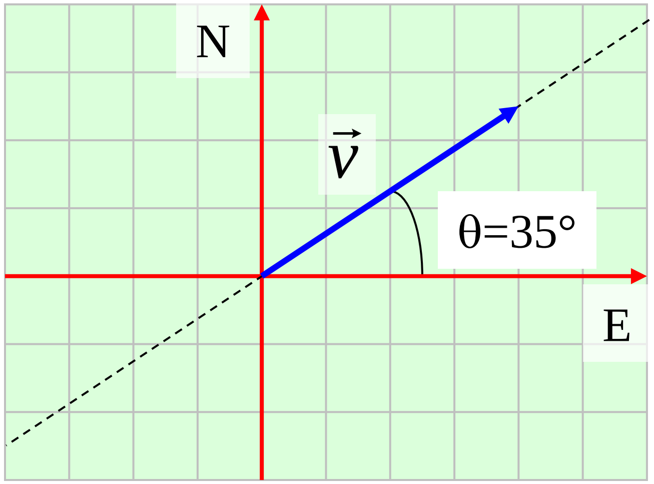
Grandezze scalari

Velocità, forza, spostamento ... sono caratterizzati da

- ♦ intensità o modulo (es. aereo viaggia a 700 km/h)
- ♦ direzione (la retta lungo cui si muove l'aereo in quell'istante)
- ♦ verso (uno dei due versi di percorrenza della retta)

Grandezze vettoriali

Si trasformano per rotazione (secondo una certa legge)

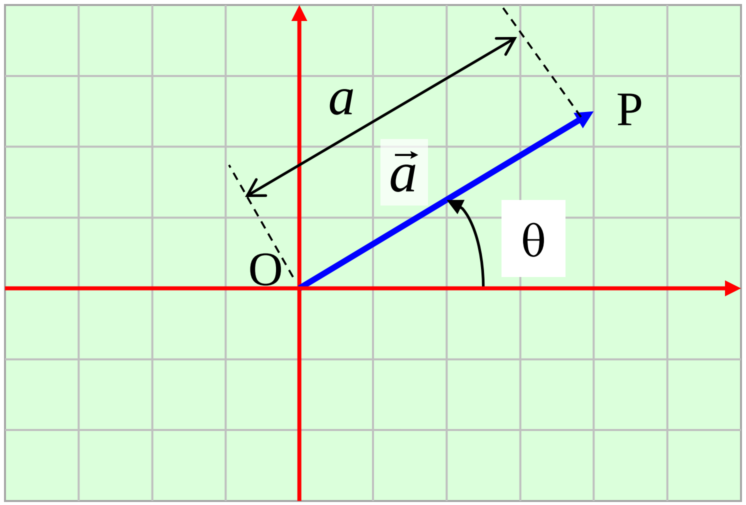


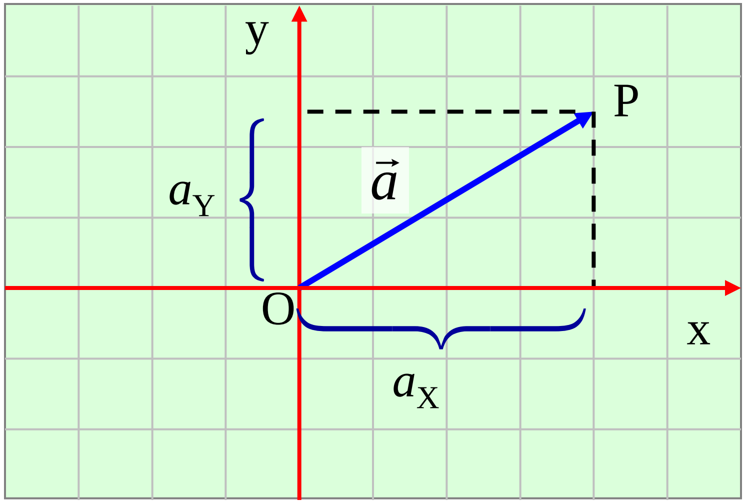
Un "vettore A" si indica con **A** oppure $\vec{A}$

il suo modulo si indica $\left|\vec{A}\right| = A$

Rappresentazione di un vettore   caso 2D

Ad es. lo spostamento **OP** in un piano





Graficamente: segmento orientato (freccia)

- lunghezza OP ($a = |\boldsymbol{a}|$)   modulo
- angolo orientato rispetto ad una retta data (θ)   } direzione e verso

(rappresentazione in coordinate polari)

In alternativa:

- Componenti X e Y rispetto ad un sistema di assi cartesiani (coordinate cartesiane)

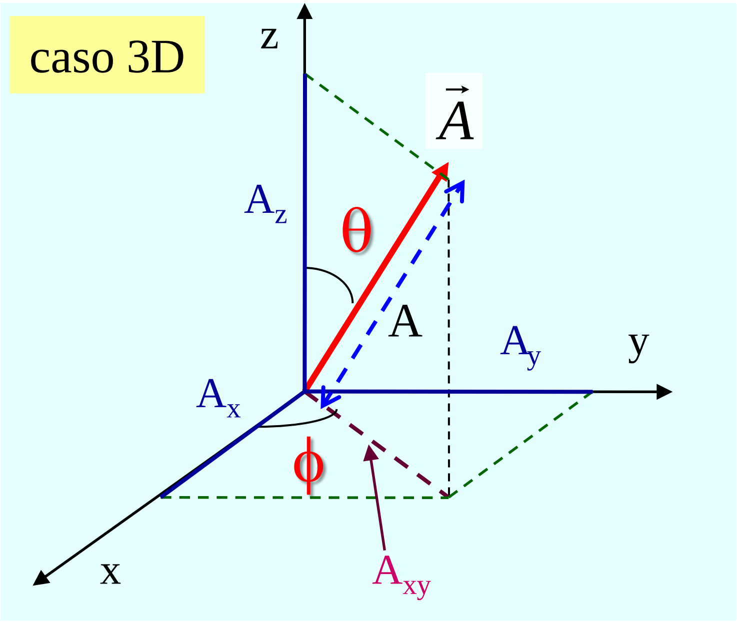
$\boldsymbol{a_X}$, $\boldsymbol{a_Y}$ sono le "componenti cartesiane" di $\boldsymbol{a}$

nota sul segno di a_X e a_Y

Relazione fra le 2 rappresentazioni

$$\begin{cases} a_X = a\cos\theta \\ a_Y = a\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \sqrt{(a_X^2 + a_Y^2)} \\ \tan\theta = a_Y / a_X \end{cases}$$

Rappresentazione di un vettore. Caso 3D



Terna cartesiana "destrorsa"

In 3D servono 3 coordinate:

coordinate cartesiane: A_x, A_y, A_z oppure
coordinate polari: modulo + 2 angoli: A, θ, ϕ

Trasformazione coordinate cartesiane / coordinate polari

$$\begin{cases} A_X = A\sin\theta\cos\phi \\ A_Y = A\sin\theta\sin\phi \\ A_Z = A\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \sqrt{(A_X^2 + A_Y^2 + A_Z^2)} \\ \cos\theta = A_Z / A \\ \tan\phi = A_Y / A_X \end{cases}$$

Attenzione: dire che due vettori sono uguali significa che

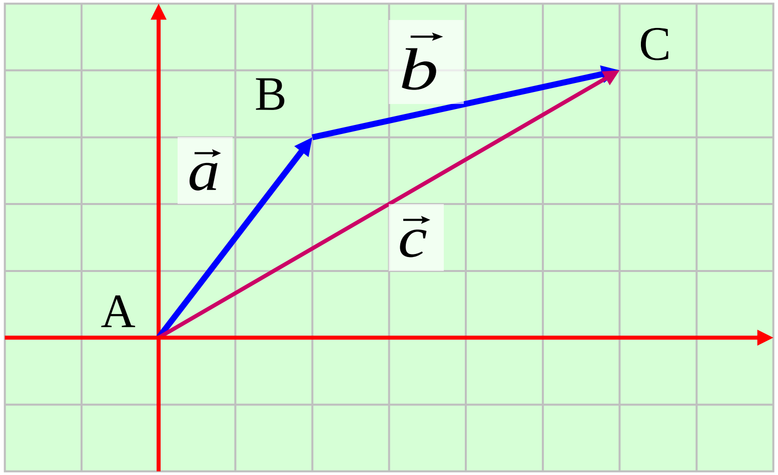
- sono uguali modulo, direzione e verso
- sono uguali le componenti X, Y, Z

Operazioni con i vettori

Consideriamo le seguenti operazioni:

somma (o differenza)	(il risultato è un vettore)	es. somma di forze, di velocità ...
prodotto di un vettore per uno scalare	(il risultato è un vettore)	es. quantità di moto
prodotto scalare di due vettori	(il risultato è uno scalare)	es. lavoro
prodotto vettoriale fra due vettori	(il risultato è un vettore)	es. momento di una forza

Operazioni con i vettori - Somma

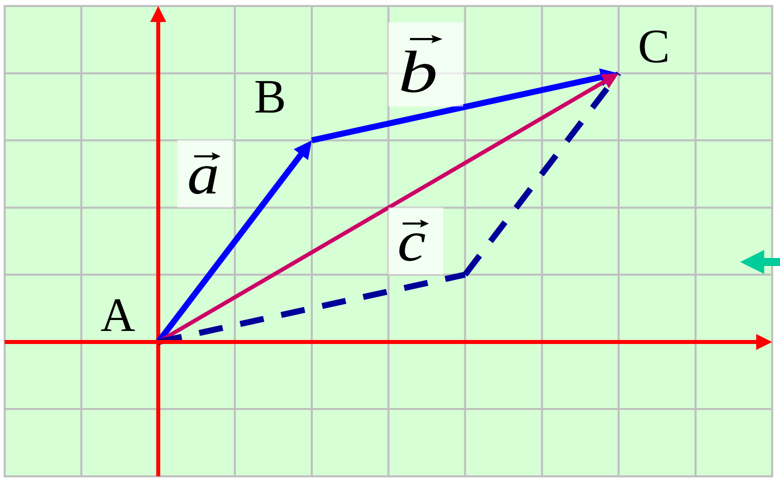


Dati gli spostamenti **AB** e **BC**
lo spostamento complessivo è **AC**

Il vettore spostamento **AC**
si dice somma di **AB** e **BC**

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

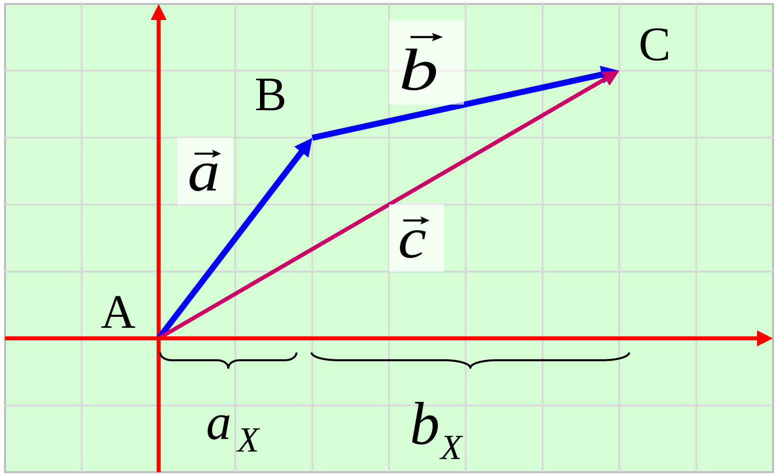


Regola del parallelogramma

Questa regola riproduce anche la somma di due forze, due velocità ecc.

Disuguaglianza triangolare: $$|a-b| \leq c \leq a+b$$

Operazioni con i vettori - Somma

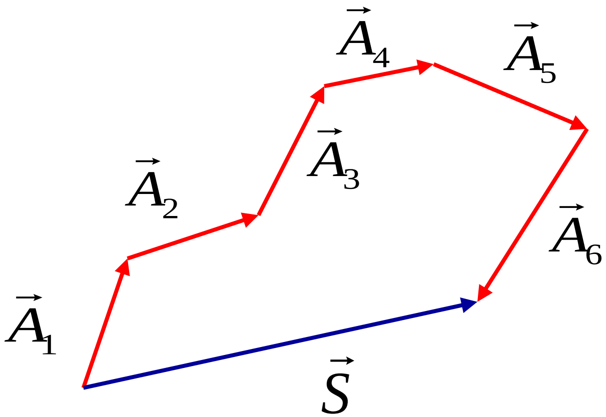


Spesso conviene usare le componenti cartesiane:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$$

$$\begin{cases} c_X = a_X + b_X \\ c_Y = a_Y + b_Y \\ c_Z = a_Z + b_Z \end{cases}$$

Somma di più vettori:



Rappresentazione grafica

$$\vec{S}=\sum_{K=1}^{6}\vec{A}_K$$

$$S_X=\sum_{K=1}^{6}\mathrm{A}_{KX}$$

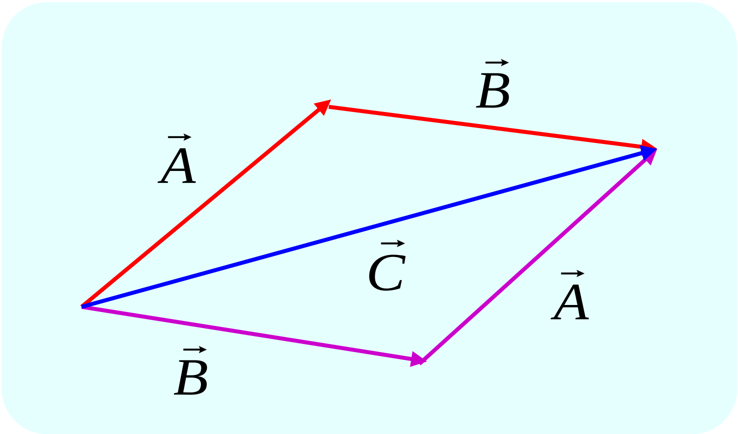
$$S_Y=\sum_{K=1}^{6}\mathrm{A}_{KY}$$

$$S_Z=\sum_{K=1}^{6}\mathrm{A}_{KZ}$$

Operazioni con i vettori - Somma

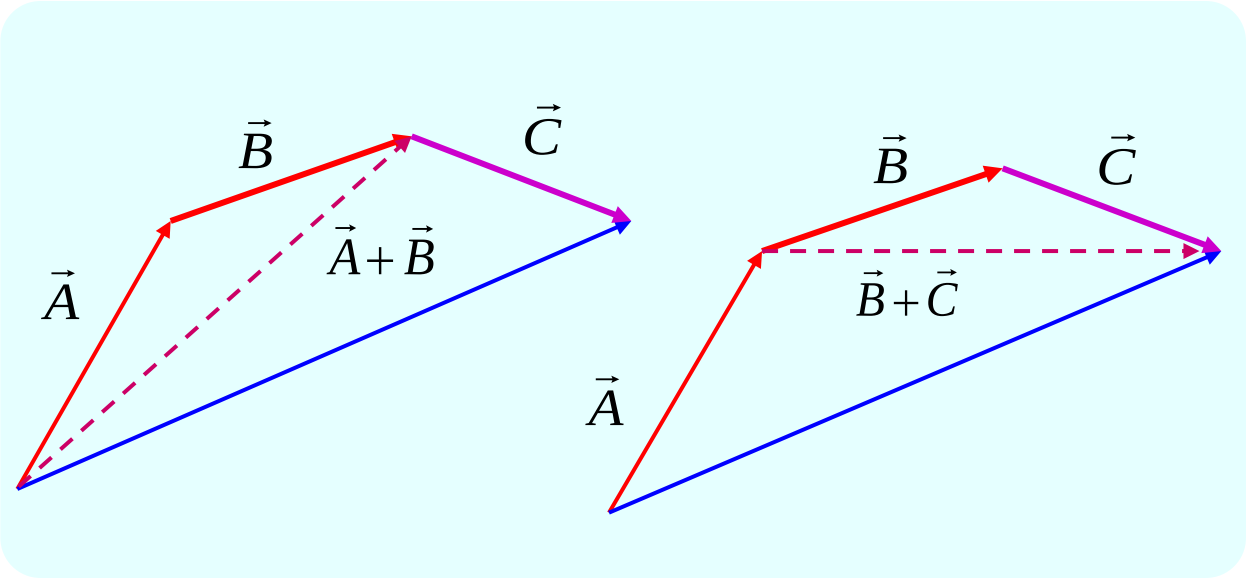
proprietà commutativa

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$



proprietà associativa

$$\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\vec{C}=\vec{A}+\left(\vec{B}+\vec{C}\right)$$

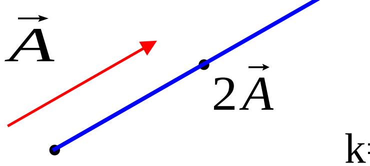


Operazioni con i vettori - Prodotto di uno scalare per un vettore:

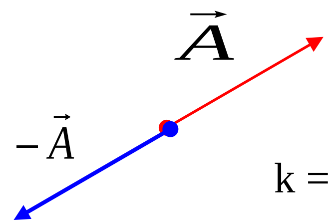
$$\vec{C} = k\vec{A}$$

- stessa direzione di **A**
- stesso verso se k>0
- verso opposto se k<0
- modulo: $C = |k|A$

$$C_X = kA_X$$
$$C_Y = kA_Y$$
$$C_Z = kA_Z$$



k=2: vettore doppio



k = -1: vettore opposto

$$(k_1 + k_2)\vec{A} = k_1\vec{A} + k_2\vec{A}$$

$$k(\vec{A} + \vec{B}) = k\vec{A} + k\vec{B}$$

Proprietà distributive rispetto alla somma

Si può operare come con i numeri reali

Operazioni con i vettori - Prodotto di uno Scalare per Vettore:

Versore : vettore di modulo unitario, adimensionale

un vettore $\vec{A}$ è caratterizzato da un modulo $\left|\vec{A}\right| = A$

e da una direzione e verso $\vec{u}_A = \frac{\vec{A}}{A}$ (versore di A) $\vec{u}_A = \frac{1}{A}\vec{A}$

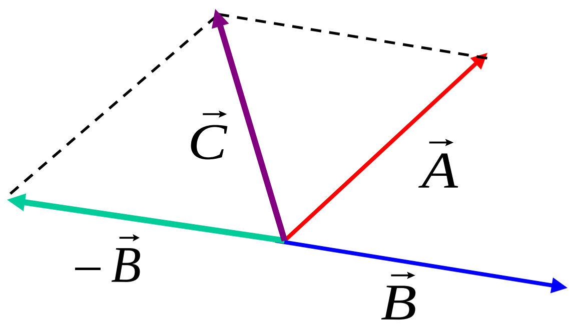
$$\left|\vec{u}_A\right| = 1 \qquad \vec{A} = A\,\vec{u}_A$$

versori degli assi:

$$\begin{cases} \vec{u}_x = (1,0,0) = \vec{i} \\ \vec{u}_y = (0,1,0) = \vec{j} \\ \vec{u}_z = (0,0,1) = \vec{k} \end{cases}$$

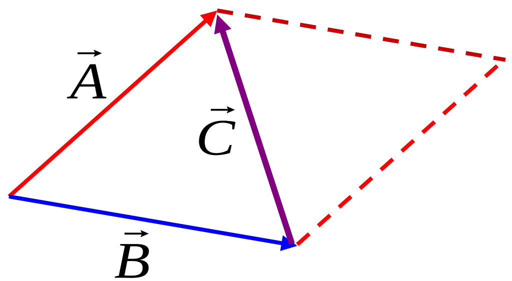
$$\vec{A} = A_x\vec{u}_x + A_y\vec{u}_y + A_z\vec{u}_z$$

Operazioni con i vettori - Differenza di vettori.



$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{C}$$
$$\vec{A}+\left(-\vec{B}\right)=\vec{C}$$

si riduce alla somma



-A è il vettore opposto di **A** $\quad \vec{\mathrm{A}}-\vec{\mathrm{A}}=0$

si opera come sui numeri reali.

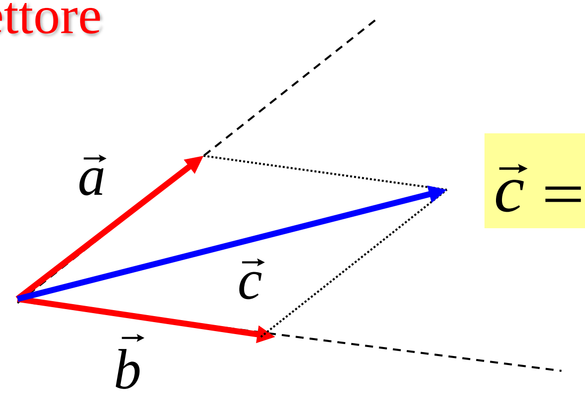
vale sempre la disuguaglianza triangolare: $\quad |A-B| \le C \le A+B$

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{C} \quad \Rightarrow \quad \vec{A}=\vec{B}+\vec{C}$$

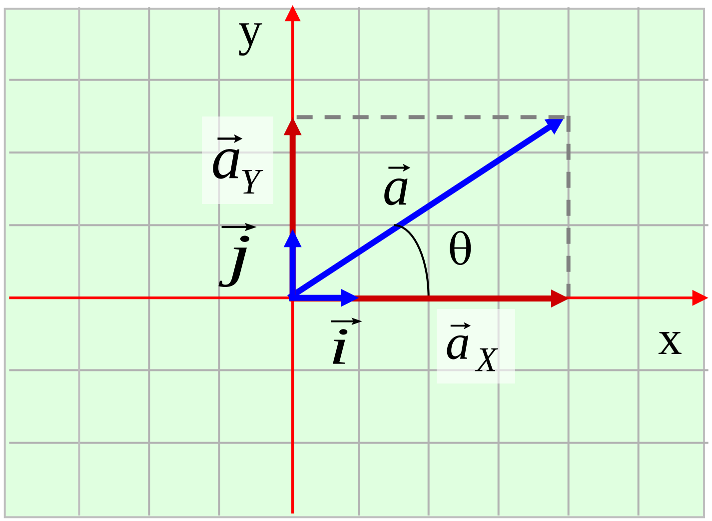
come con i numeri reali, si può portare all’altro membro cambiando di segno

Scomposizione di un vettore

Scomposizione lungo due (o più) direzioni date.
Inversione della regola del parallelogramma:



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

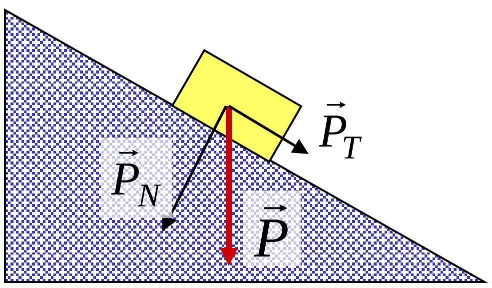


Ci interesserà la scomposizione lungo direzioni ortogonali fra loro (assi cartesiani)

a$_{\mathbf{X}}$ e ***a***$_{\mathbf{Y}}$ sono i vettori componenti di ***a***

a_X e a_Y sono le componenti (cartesiane) di ***a***

$$\vec{a} = \underbrace{a_x \vec{u}_x}_{\vec{a}_x} + a_y \vec{u}_y = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$



Esempio: scomposizione della forza peso su un piano inclinato.

$$\vec{P} = \vec{P}_T + \vec{P}_N$$

Operazioni con i vettori - Prodotto scalare

il risultato è uno scalare

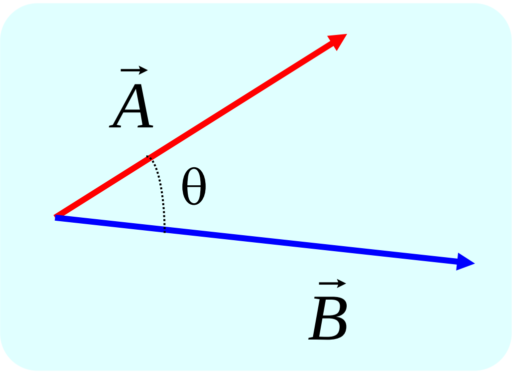
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = c$$

«A scalar B» (*)

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_X B_X + A_Y B_Y + A_Z B_Z$$

$$\vec{A}\cdot\vec{u}_x = A_X$$



Proprietà commutativa: $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$

Proprietà distributiva: $\vec{A}\cdot\left(\vec{B}+\vec{C}\right) = \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$

$\vec{A}\cdot\vec{B}=0 \Leftrightarrow$ A e B ortogonali

$\vec{A}\cdot\vec{B}>0 \Leftrightarrow$ $0 < \theta < 90°$

$\vec{A}\cdot\vec{B}<0 \Leftrightarrow$ $90° < \theta < 180°$

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = |A||A|\cos 0 = |A|^2$$

$$u_x \cdot u_y = \vec{u}_x \cdot \vec{u}_z = \vec{u}_y \cdot \vec{u}_z = 0$$

$$\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x = \vec{u}_y \cdot \vec{u}_y = \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z = 1$$

(*) All'orale non dire «A per B»

Operazioni con i vettori - Prodotto vettoriale (solo in 3D)

il risultato è un vettore (pseudovettore)

$$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{C}$$

«A vettor B» (*)

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = AB\sin\theta$$

$$\theta = 0° \quad \Rightarrow C = 0$$

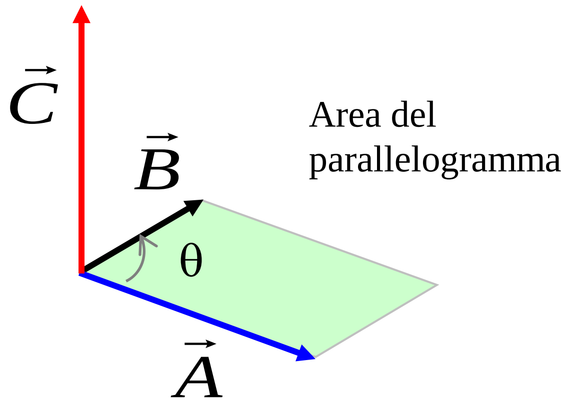
$$\theta = 180° \Rightarrow C = 0$$

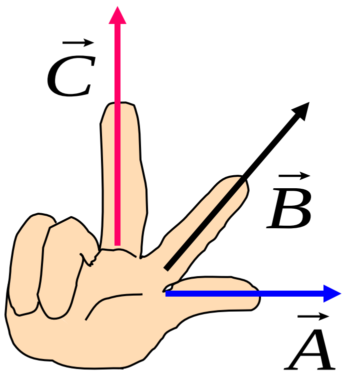
$$\theta = 90° \Rightarrow C = AB$$

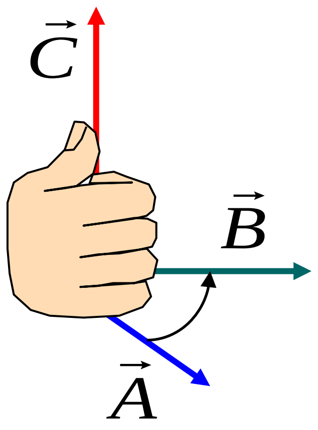
Modulo: area del parallelogramma

Direzione: ortogonale ad A e B

Verso: mano destra o vite destrorsa







(*) non dire «A per B» all'orale

Operazioni con i vettori - Prodotto vettoriale

$$\vec{B}\times\vec{A}=-\vec{A}\times\vec{B}$$

Proprietà anticommutativa. Importante differenza rispetto al prodotto di numeri reali

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$$

Proprietà distributiva:

componente di **B** ortogonale ad **A**

componente di **A** ortogonale a **B**

$$\left|A\times B\right| = AB\sin\theta = \left|AB_{\perp}\right| = \left|A_{\perp}B\right|$$

Formalmente

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_X = A_Y B_Z - A_Z B_Y$$
$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_Y = A_Z B_X - A_X B_Z$$
$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_Z = A_X B_Y - A_Y B_X$$

$$\begin{Vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{Vmatrix} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} \vec{u}_x \times \vec{u}_y = \vec{u}_z \\ \vec{u}_y \times \vec{u}_z = \vec{u}_x \\ \vec{u}_z \times \vec{u}_x = \vec{u}_y \end{cases}$$

permutazione ciclica

Derivata di un vettore

$$\vec{C} = \frac{d\vec{A}}{dt} \qquad C_X = \frac{dA_X}{dt} \qquad C_Y = \frac{dA_Y}{dt} \qquad C_Z = \frac{dA_Z}{dt}$$

Proprietà

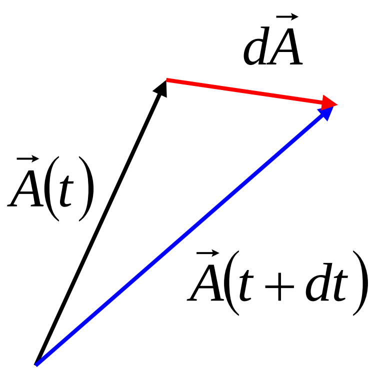
$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(k\vec{A}\right) = \frac{dk}{dt}\vec{A} + k\frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right) = \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt}$$

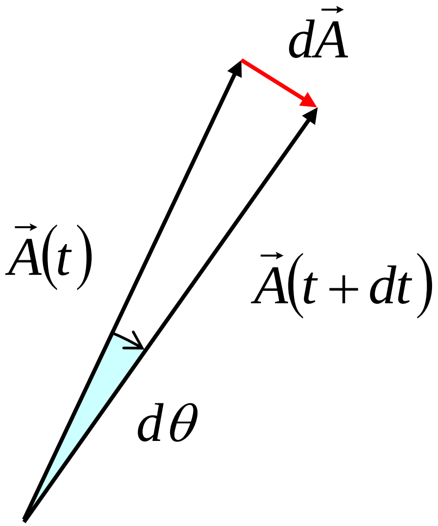
$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}$$

Interpretazione geometrica:



Derivata di un vettore:

Caso di vettore di modulo costante



intuitivamente, d**A** diventa ortogonale ad **A** quando l'angolo sotteso tende a 0.

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\cdot\vec{A}\right)=2\frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{A}=0$$

nel limite di angoli piccoli $dA = Ad\theta$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = A\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_N = A\omega\vec{u}_N$$

versore ortogonale ad **A**

ω è una velocità angolare (v.): se il modulo è costante il vettore può solo ruotare