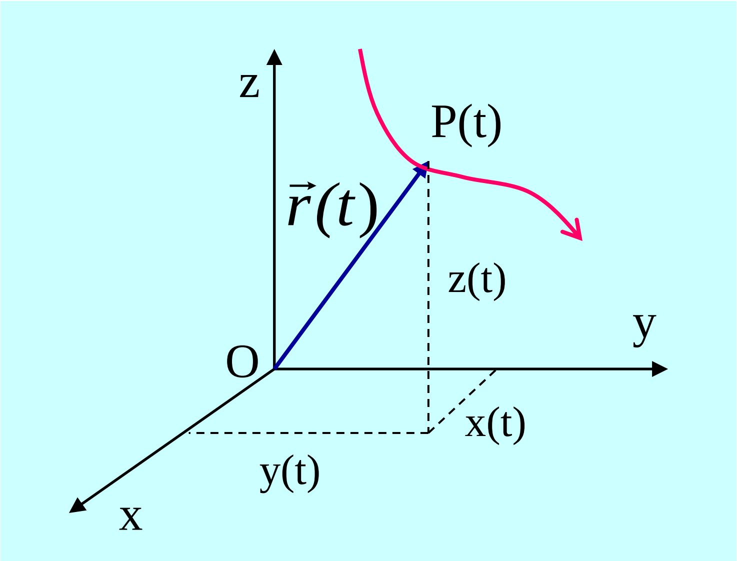
Cinematica del punto. 3D



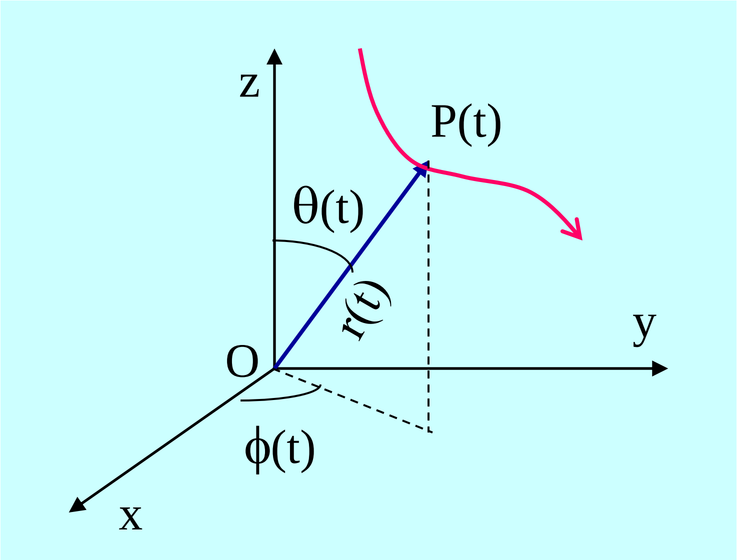
in forma vettoriale

$$\overrightarrow{OP}(t) = \vec{r}(t)$$

Vettore posizione

ovvero vettore spostamento dall'origine

La rappresentazione vettoriale permette una descrizione "sintetica" del moto.



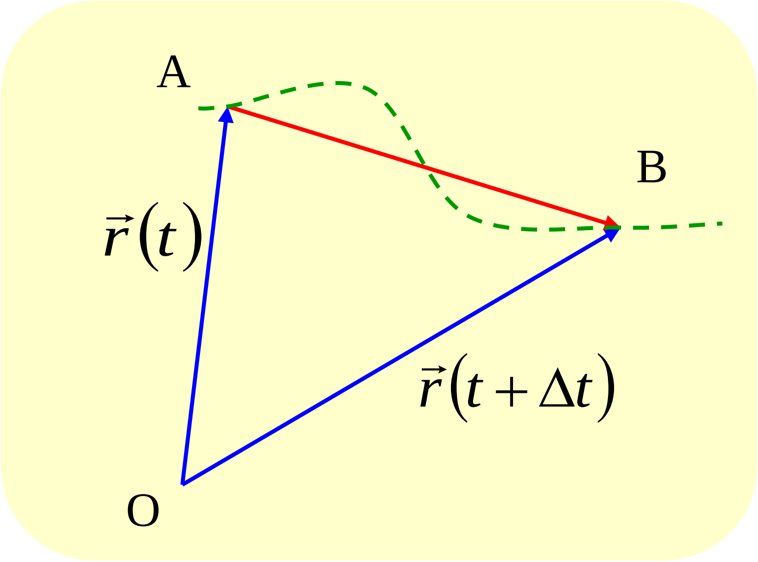
Nei calcoli pratici in genere si usano le coordinate

$$\begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} r(t) \\ \theta(t) \\ \varphi(t) \end{cases}$$

cartesiane polari

Descrizioni equivalenti.

Moto nello spazio. Velocità.



$$\overrightarrow{OA} = \vec{r}(t)$$ posizione iniziale

$$\overrightarrow{OB} = \vec{r}(t+\Delta t)$$ posizione finale

$$\Delta\vec{r} = \overrightarrow{AB} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$ spostamento

$$\Delta\vec{r} = (\Delta x, \Delta y)$$ (nel piano)

velocità media

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad \begin{cases} \langle v_X \rangle = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \\ \langle v_Y \rangle = \dfrac{\Delta y}{\Delta t} \end{cases}$$

velocità istantanea

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \begin{cases} v_X = \dfrac{dx}{dt} \\ v_Y = \dfrac{dy}{dt} \end{cases}$$

Moto nello spazio. Velocità.

La velocità è tangente alla traiettoria

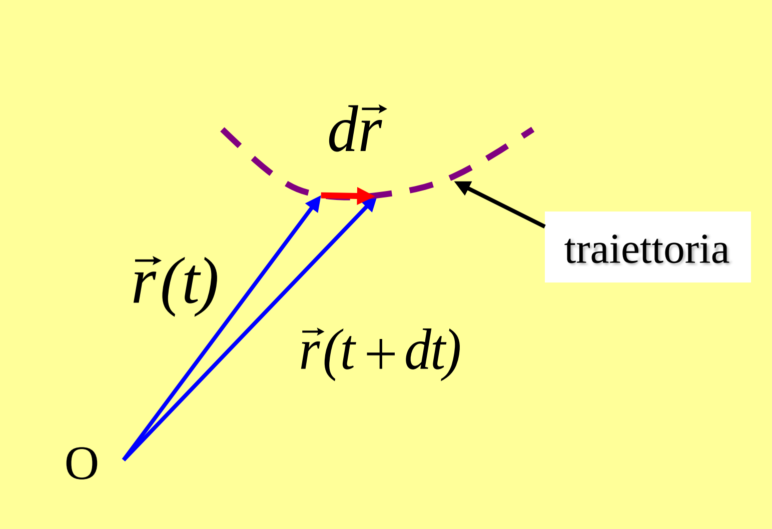
$\vec{v}$ definisce la direzione del moto

$$d\vec{r} = ds \cdot \vec{u}_T \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \left(\frac{ds}{dt}\right)\vec{u}_T}$$

versore tangente

$$v = |\vec{v}|$$

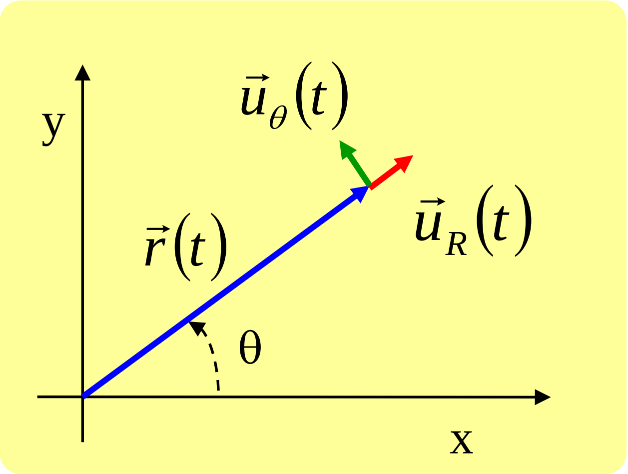
$$\boxed{\vec{v} = v\,\vec{u}_T}$$



Nota. Si è usata la seguente identità:

$$v = |\vec{v}| = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{ds}{dt}$$

Velocità in coordinate polari (caso 2D)



$$\vec{r} = r\,\vec{u}_R$$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_R + r\frac{d\vec{u}_R}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_R}{dt} = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{u}_\theta = \omega\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{u}_R = (\cos\theta, \sin\theta)$$
$$\vec{u}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

$$\frac{d\vec{u}_R}{d\theta} = \vec{u}_\theta$$

$$\vec{v} = \left(\frac{dr}{dt}\right)\vec{u}_R + r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{u}_\theta$$

$$\vec{v} = v_R\,\vec{u}_R + r\omega\,\vec{u}_\theta$$

Moto nello spazio. Accelerazione

accelerazione media:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

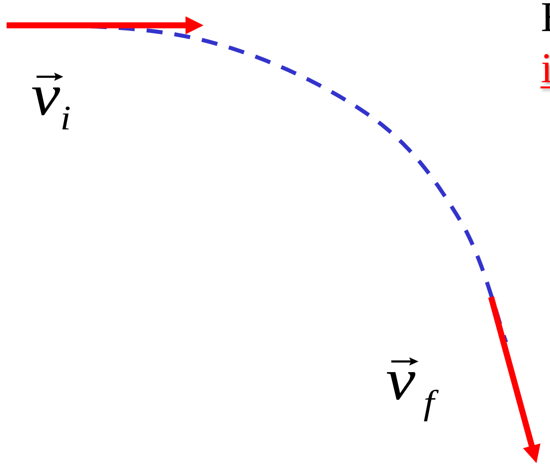
accelerazione istantanea:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Leftrightarrow$$

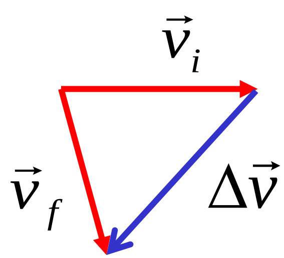
In coordinate cartesiane:

$$\begin{cases} a_X = \dfrac{dv_X}{dt} \\ a_Y = \dfrac{dv_Y}{dt} \end{cases}$$

C’è una differenza fondamentale fra l’accelerazione in 2D (o 3D) e in 1D



Esempio. auto percorre una curva con velocità costante in modulo (il tachimetro indica un valore costante)

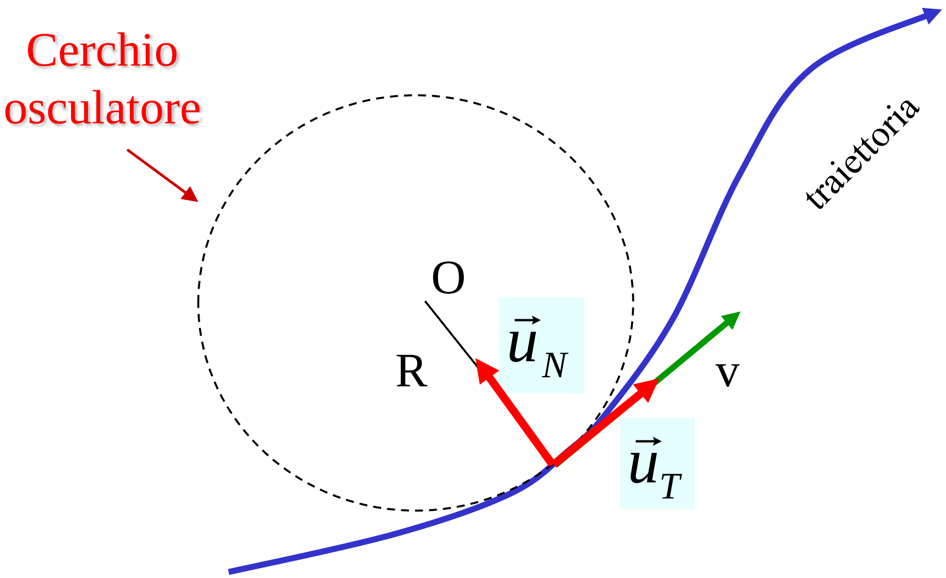


quindi $\langle \vec{a} \rangle \neq 0$

in generale $\vec{a} \neq 0$ anche se $|\vec{v}|$ è costante

Accelerazione in 2 o 3D

Ogni curva (*) può essere approssimata localmente (al 2° ordine) con una circonferenza



Cerchio osculatore, caratterizzato da un raggio ed un centro di curvatura

possiamo trattare l'accelerazione in un moto circolare, senza perdere in generalità

(*) purché continua e derivabile "quanto basta" ... naturalmente non è così nelle cuspidi ecc.

Accelerazione in 3D

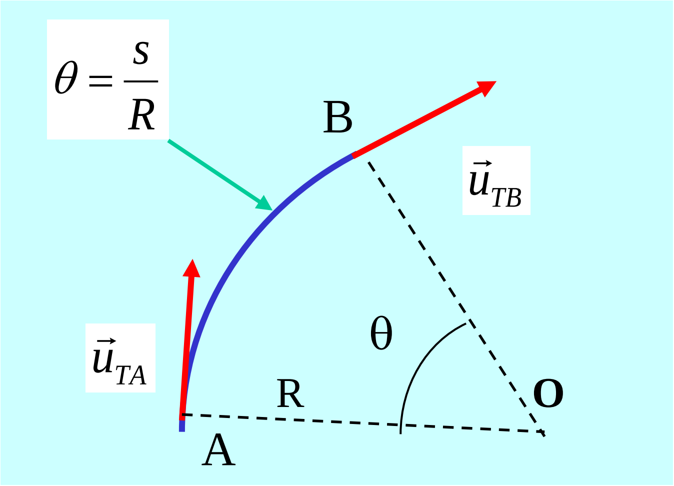
$$\vec{v} = v\vec{u}_T \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv}{dt}\right)\vec{u}_T + v\left(\frac{d\vec{u}_T}{dt}\right)}$$

componente tangente

$$a_T$$

$$\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_N$$

componente normale o centripeta



Senza perdere in generalità consideriamo un moto circolare.

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$$

Accelerazione

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\vec{u}_T}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

in modulo:

accelerazione tangente $$a_T = \frac{dv}{dt}$$

accelerazione normale
o centripeta $$a_N = \frac{v^2}{R}$$

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$$

perché a_T e a_N sono ortogonali

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T$$ in un moto rettilineo

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{u}_N$$ se il |**v**| è costante

Equazioni del moto

dalle definizioni $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ invertendo si ricava:

in forma vettoriale.

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t)dt$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t)dt$$

in coordinate cartesiane

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \int_0^t v_x(t)dt \\ y(t) = y_0 + \int_0^t v_y(t)dt \\ z(t) = z_0 + \int_0^t v_z(t)dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} + \int_0^t a_x(t)dt \\ v_y(t) = v_{0y} + \int_0^t a_y(t)dt \\ v_z(t) = v_{0z} + \int_0^t a_z(t)dt \end{cases}$$

Casi particolari

Moto uniforme. $\vec{v} = \text{cost}$ costante in modulo, direzione e verso!

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t$$

cioè

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_x t \\ y(t) = y_0 + v_y t \\ z(t) = z_0 + v_z t \end{cases}$$

equazione parametrica di una retta
passante per $\mathbf{r_0}$
di direzione $\mathbf{v}$

un moto uniforme è sempre rettilineo:

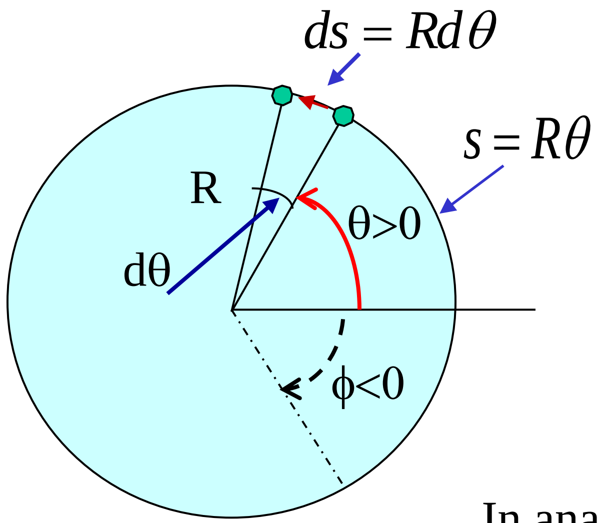
Moto uniformemente accelerato. $\vec{a} = \text{cost}$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

Un moto uniformemente accelerato è sempre

- piano
- parabolico o rettilineo



Moto circolare – grandezze angolari

E' naturale individuare il punto sulla circonferenza mediante un angolo. Fissata una posizione "zero" e un verso di percorrenza l'angolo può essere >0 o <0

In analogia con velocità e accelerazione lineari si definiscono:

$$\langle\omega\rangle = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$$

velocità angolare media

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

velocità angolare istantanea

$$[\omega] = \frac{rad}{s} = s^{-1}$$

$$\langle\alpha\rangle = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}$$

accelerazione angolare media

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

accelerazione angolare istantanea

$$[\alpha] = \frac{rad}{s^2} = s^{-2}$$

Moto circolare

fra grandezze angolari valgono le stesse relazioni viste nel modo rettilineo, ad es.

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega(t')dt' \qquad \omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha(t')dt'$$

quanto alle grandezze lineari

$$s = R\theta \qquad v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega \qquad a_T = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

non è tutta l'accelerazione!

ovvero $v = \omega R$ $\quad a_T = \alpha R$

ω

infatti $\vec{v} = v\vec{u}_T \quad \Rightarrow \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\dfrac{d\vec{u}_T}{dt} = \alpha R\vec{u}_T + v\dfrac{d\theta}{dt}\vec{u}_N$

$$\vec{a} = \alpha R\vec{u}_T + \omega^2 R\,\vec{u}_N$$

Moto circolare uniforme

$\omega = \text{cost}$ velocità angolare costante

$\alpha = 0$ accelerazione angolare nulla

$v = \text{cost}$ modulo della velocità costante

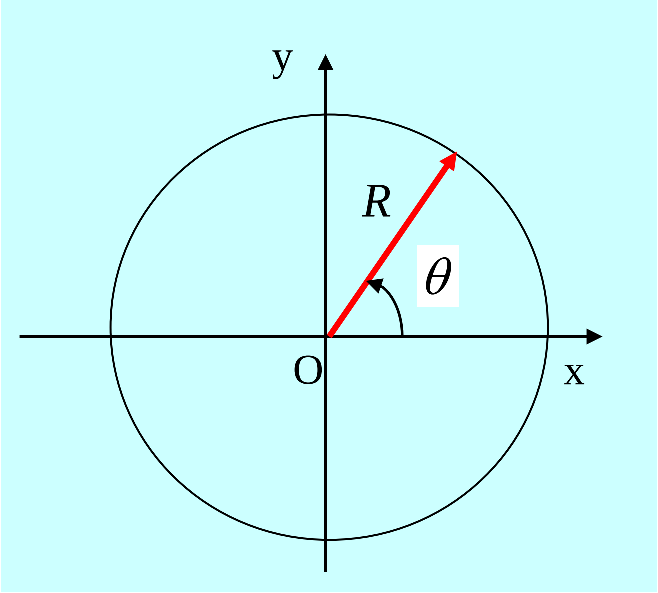
$a_T = 0$ accelerazione tangente nulla

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$$

$$\vec{a} = 0 + \omega^2 R\, \vec{u}_N$$

Un moto circolare uniforme è periodico. Detto T il periodo

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$ essendo $$\nu = \frac{1}{T}$$ la frequenza $$[\nu] = \frac{1}{s} = Hz$$



$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t + \theta_0) \\ y(t) = R\sin(\omega t + \theta_0) \end{cases}$$

le componenti cartesiane di un moto circolare uniforme si muovono di moto armonico

Moto circolare uniformemente accelerato

$\alpha = \text{cost}$ accelerazione angolare costante

$a_T = \alpha R = \text{cost}$ accelerazione tangente di modulo costante

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

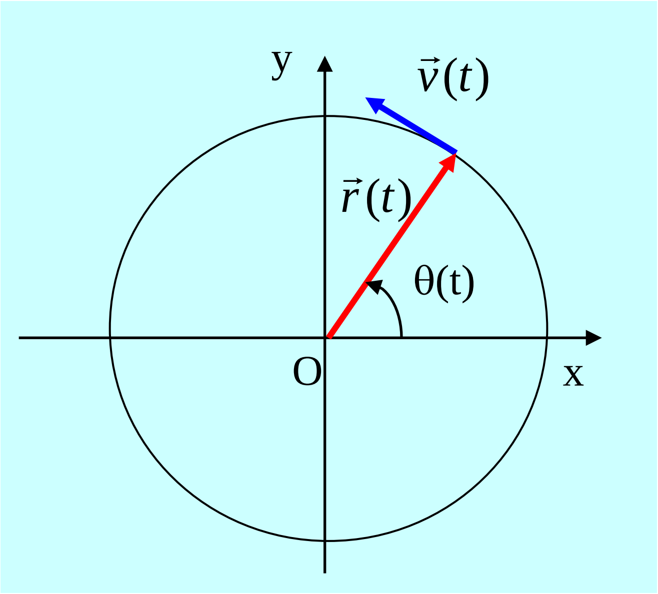
$$\Delta\theta = \frac{\omega_f^2 - \omega_i^2}{2\alpha}$$

(se t_0=0)

Moto circolare. Descrizione vettoriale

Si può definire un vettore velocità angolare tale che

- il modulo rappresenta la velocità angolare
- la direzione è parallela all'asse di rotazione
- il verso è legato al verso di rotazione dalla regola della mano destra



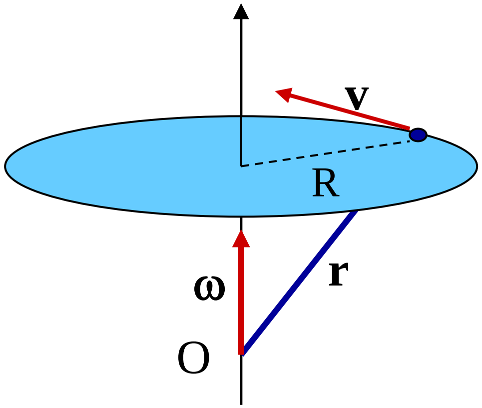
La velocità del punto è $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$$\vec{a} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right) \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

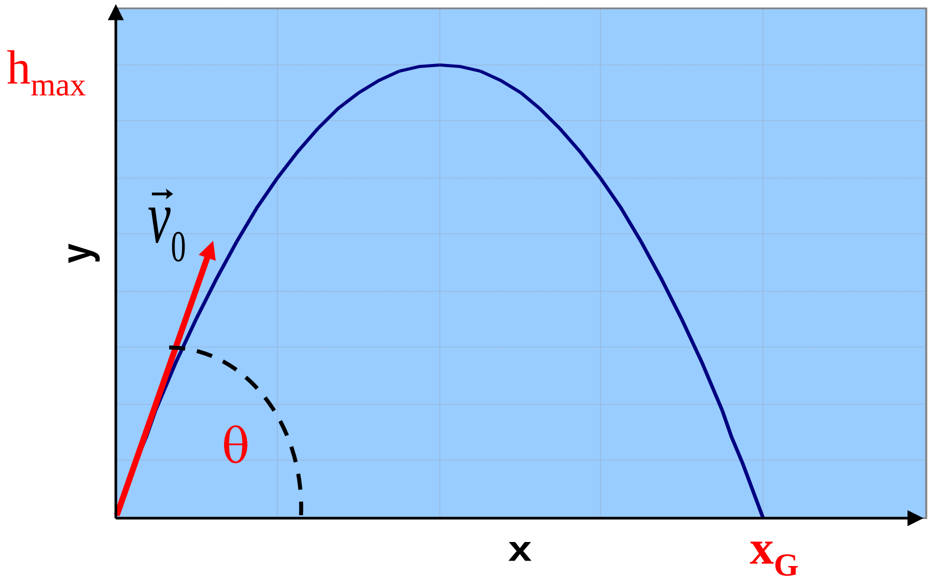
$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}$$

non è necessario che O coincida con il centro di rotazione, basta che stia sull'asse



Esempio di moto 2D: moto dei proiettili senza resistenza dell'aria



L'intuizione di Galileo:
il moto lungo l'orizzontale e il moto lungo la verticale sono indipendenti.
(v. leggi di Newton)

moto uniforme lungo l'orizzontale (x)
moto unif. accelerato lungo la verticale (y)

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0X} \\ v_y(t) = v_{0Y} - gt \end{cases}$$

dove

$$v_{0X} = v_0 \cos\theta$$
$$v_{0Y} = v_0 \sin\theta$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0X}t \\ y(t) = y_0 + v_{0Y}t - \dfrac{g}{2}t^2 \end{cases}$$

è la soluzione completa che conviene ricordare

Legge oraria

Esempio di moto 2D: moto dei proiettili senza resistenza dell'aria

Qual è la forma della traiettoria? (per semplicità poniamo $x_0=y_0=0$)

$$\begin{cases} t = x/v_{0X} \\ y(x) = \dfrac{v_{0Y}}{v_{0X}} x - \dfrac{g}{2v_{0X}^2} x^2 \end{cases}$$

si esprime il tempo in funzione di x

eliminando il tempo nell'espressione di y(t) si trova l'equazione della traiettoria

in funzione del modulo della velocità iniziale v_0 e dell'angolo θ diventa

$$y(x) = \tan\theta \cdot x - \frac{g}{2(v_0 \cos\theta)^2} x^2$$

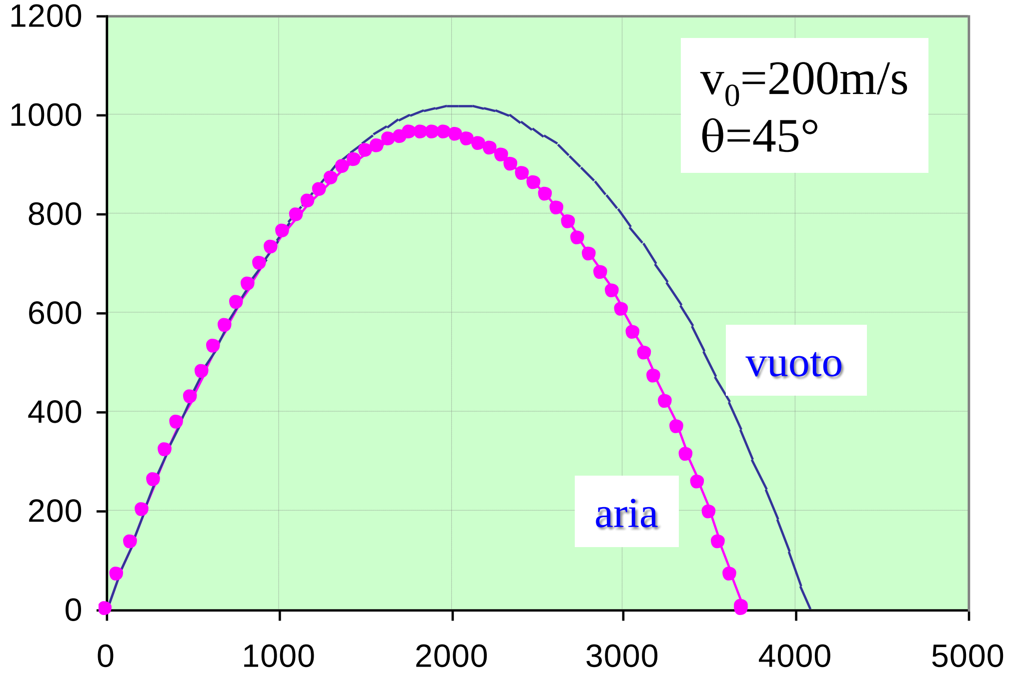
altri parametri utili della traiettoria:

$$x_G = \frac{2v_{0X} v_{0Y}}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta)$$

gittata su un piano orizzontale (massima per θ=45°)

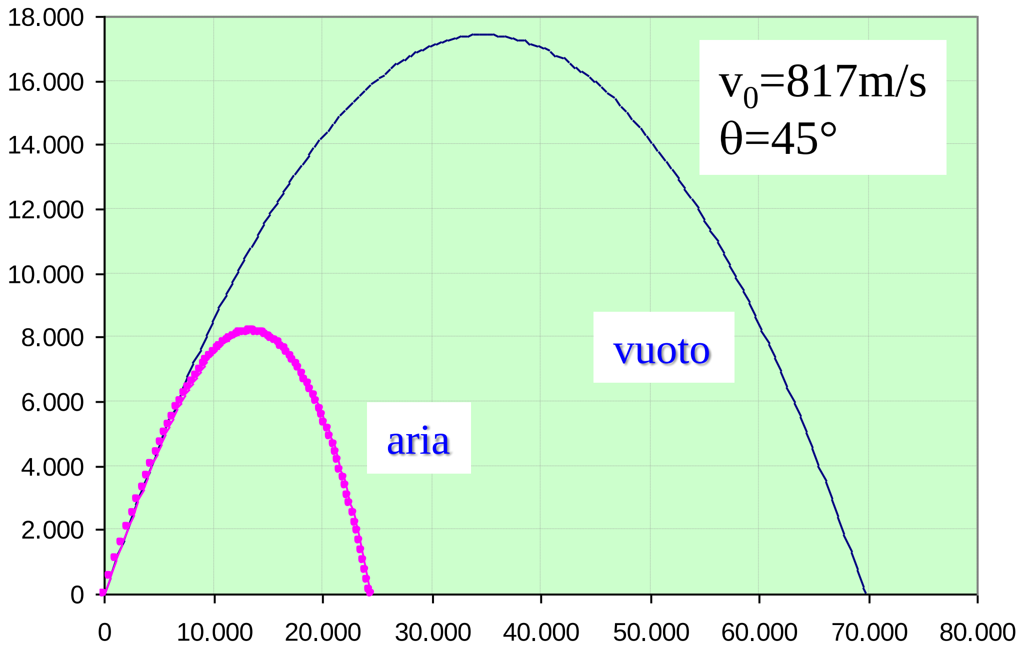
$$h_{MAX} = \frac{v_{0Y}^2}{2g} = \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g}$$

altezza massima



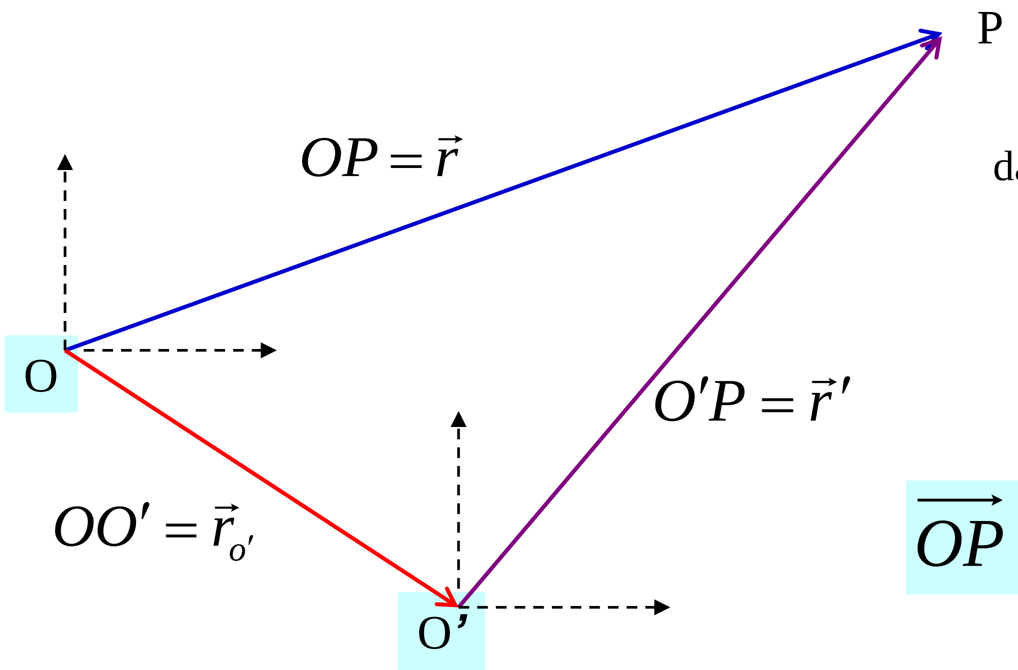
Resistenza dell'aria.
E' veramente trascurabile?

Effetto della resistenza dell'aria su un proiettile di artiglieria calibro 155 mm e massa 44 kg



Moti relativi (in assenza di rotazioni)

Si può parlare di moto solo relativamente ad altri oggetti, cioè ad un "sistema di riferimento".



La posizione del punto **P** è individuata dal vettore posizione **OP** per l'"osservatore" o sistema di riferimento **O** ...

evidentemente

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} \qquad \vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_{o'}$$

derivando rispetto al tempo ...

$$\vec{v} = \vec{v}_{o'} + \vec{v}\,'$$

Teorema delle velocità relative

$$\vec{a} = \vec{a}_{o'} + \vec{a}\,'$$

Teorema delle accelerazioni relative

Formule semplici, valide soltanto se il sistema di riferimento mobile trasla senza ruotare

Moti relativi (in assenza di rotazioni)

le relazioni precedenti si possono leggere anche come segue

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{o'}$$

velocità del punto P relativa ad O'

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_{o'}$$

accelerazione del punto P relativa ad O'

Ovvero:

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$$

velocità di A rispetto a B

$$\vec{a}_{AB} = \vec{a}_A - \vec{a}_B$$

accelerazione di A rispetto a B

Esempio: la velocità di un aereo rispetto all'aria è pari alla velocità dell'aereo (rispetto al suolo) meno la velocità dell'aria (rispetto al suolo)