Conseguenze generali delle leggi di Newton. Principi di conservazione

Note le forze, la 2ª L. di Newton consente di calcolare il moto di un corpo. E' solo questione di calcolo

Tuttavia si possono dimostrare alcune proprietà o leggi generali molto importanti, perché

- forniscono un punto di vista globale di applicabilità generale
- la loro validità trascende di gran lunga i limiti della meccanica newtoniana

Queste sono formulate come "leggi di conservazione", nel senso che, a certe condizioni, alcune quantità rimangono costanti durante l'evoluzione del sistema.

sono considerate le leggi più generali della Fisica e derivano in ultima analisi da simmetrie fondamentali dello spazio-tempo.

Conservazione dell'Energia (invarianza per traslazione temporale: omogeneità del tempo)

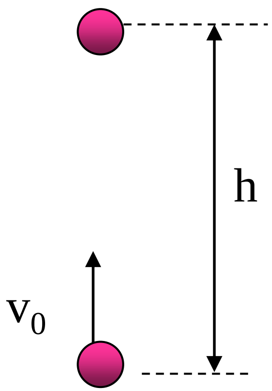
Conservazione della quantità di moto (invarianza per traslazione: omogeneità dello spazio)

Conservazione del momento angolare (invarianza per rotazione: isotropia dello spazio)

Il lavoro di sistemazione della meccanica classica copre un lungo periodo storico: dalla pubblicazione dei "Principia" di I.Newton (1687) ai lavori di P-S de Laplace e W.R.Hamilton (1796 - 1835)

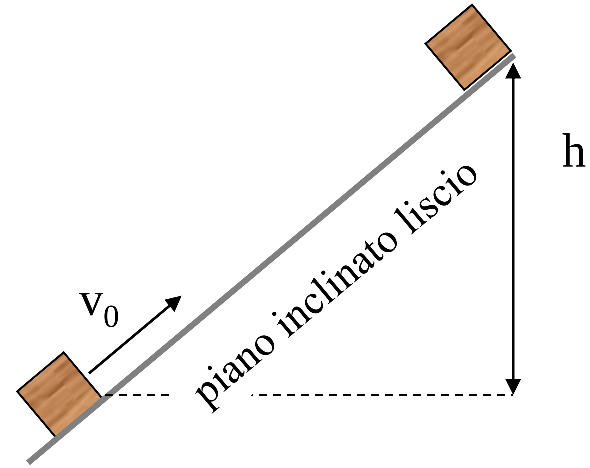
Energia meccanica - Introduzione. C'è sotto qualcosa?

Esempio 1. Altezza massima raggiunta da un corpo con velocità iniziale $\mathbf{v_0}$

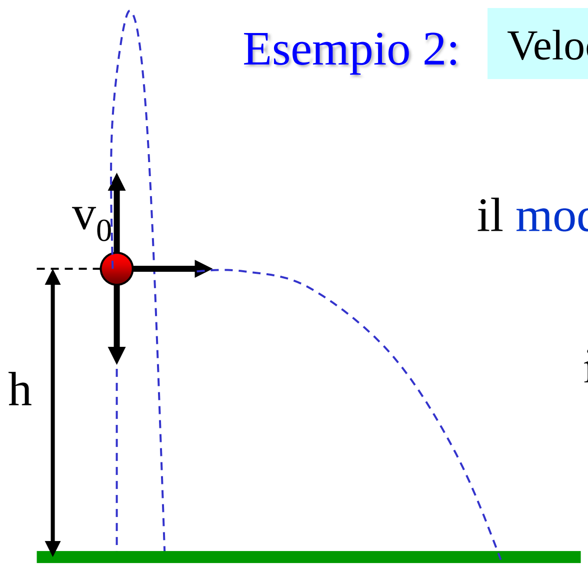


$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

in entrambi i casi
e in molti altri



Esempio 2: Velocità al suolo di un corpo lanciato con velocità iniziale $\mathbf{v_0}$



il modulo della velocità all'impatto vale: $v_f = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$

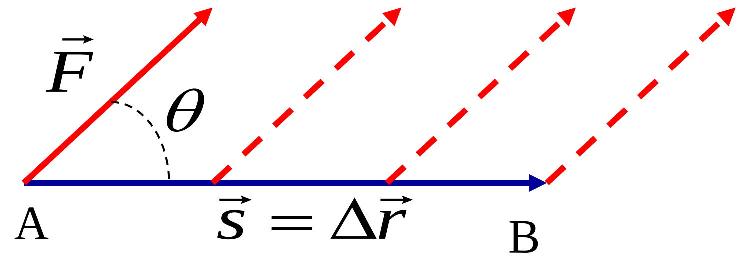
indipendentemente dall'angolo di lancio

Lavoro di una forza - definizione

Esempio:
lavoro di una forza costante, il cui punto di applicazione si sposta da A a B.

prodotto scalare

$$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs\cos\theta = F_T s$$



grandezza scalare

Unità di misura è il Joule.

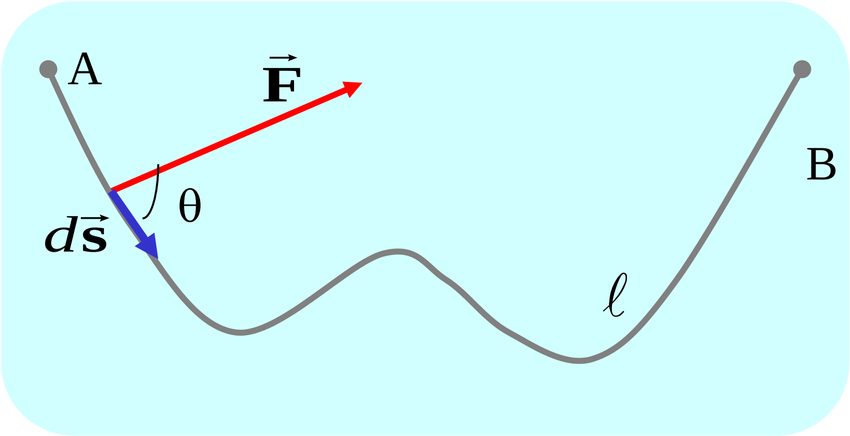
$$[W] = J = Nm = kg\,\frac{m^2}{s^2}$$

Nota: questo è un esempio particolare, non la definizione generale di lavoro (*)

lavoro motore	$W > 0$	$\Leftrightarrow$	$0° < \theta < 90°$
lavoro resistente	$W < 0$	$\Leftrightarrow$	$90° < \theta < 180°$
lavoro nullo	$W = 0$	$\Leftrightarrow$	$\theta = 90°$

(*) Non dire che il lavoro è «forza per spostamento»

Lavoro di una forza - definizione



Nel caso generale si divide il tragitto in tratti abbastanza piccoli che la forza **F** si possa considerare costante in ognuno di essi

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Lavoro di una forza il cui punto di applicazione si sposta da A a B lungo la linea ℓ.

$$W = \int_{A,\ell}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{A,\ell}^{B} F \cos\theta \, ds$$

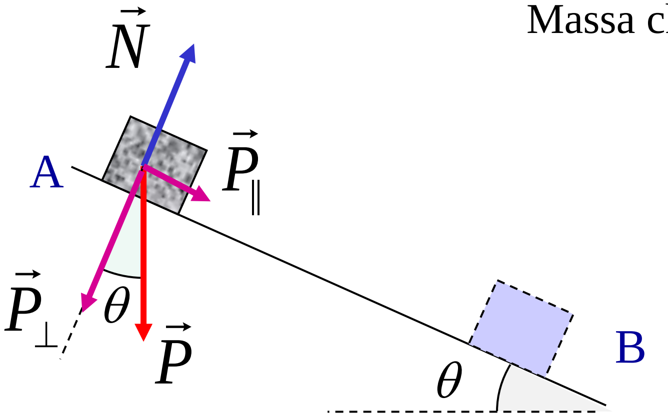
queste sono le formule da ricordare!

In generale, il lavoro dipende dal tragitto.

in componenti cartesiane: $$W = \int_{A,\ell}^{B} \left(F_X \, dx + F_Y \, dy + F_Z \, dz \right) = \int_{A,\ell}^{B} F_X \, dx + \int_{A,\ell}^{B} F_Y \, dy + \int_{A,\ell}^{B} F_Z \, dz$$

attenzione: i tre integrali non sono indipendenti.

Lavoro di una forza - Esempio



Massa che scivola da A a B su un piano inclinato liscio (AB=s)

$$W_P = m\vec{g}\cdot\overrightarrow{AB} = mg\sin\theta\cdot s$$

$$W_N = 0 \qquad W_{TOT} = W_P + W_N = mg\sin\theta\cdot s$$

moto uniformemente accelerato con $a = g\sin\theta$ $\quad \dfrac{v_f^2}{2} - \dfrac{v_i^2}{2} = g\sin\theta\cdot\Delta s$

moltiplicando per la massa: $W_{TOT} = \dfrac{m}{2}v_f^2 - \dfrac{m}{2}v_i^2$ ovvero $W_{TOT} = \Delta E_K$

$$E_K = \frac{m}{2}v^2 = \frac{p^2}{2m}$$

Energia cinetica di un punto materiale

grandezza scalare, si misura in $[E_K] = kg\dfrac{m^2}{s^2} = J$

Il risultato appena ottenuto è un caso particolare di un teorema generale

Teorema dell'Energia cinetica per un punto materiale

Si consideri un punto materiale soggetto alla forza risultante **F**. In uno spostamento da A a B

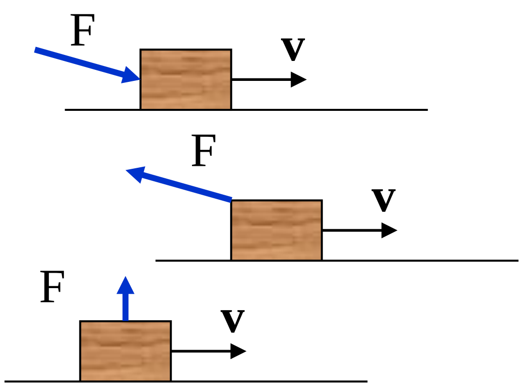
$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \qquad \vec{F} \cdot d\vec{s} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} = m\left(\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\right)dt = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt$$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{m}{2}v_B^2 - \frac{m}{2}v_A^2 = E_{Kf} - E_{Ki}$$

ovvero $\boxed{W_{TOT} = \Delta E_K}$

di validità generale, conseguenza delle sole leggi di Newton

- se W>0 l'energia cinetica aumenta (|**v**| aumenta)
- se W<0 l'energia cinetica diminuisce (|**v**| diminuisce)
- se W=0 l'energia cinetica non varia



Il segno del lavoro non è convenzionale! Non dipende dalla scelta delle coordinate.

Teorema dell'Energia cinetica – precisazione importante

il teorema è stato dimostrato per un punto materiale. Vedremo in seguito che si può estendere ad un sistema qualsiasi

$$W_{TOT} = \sum_{k=1}^{N} W_k = \Delta E_K$$

lavoro della forza F_k

la formula è identica ma c'è una differenza importante: se il sistema non è un punto materiale il lavoro totale (somma del lavoro di tutte le forze) non è uguale al lavoro della forza risultante

$$\sum_{k=1}^{N} W_k \neq W_{F\,tot}$$

(L'uguaglianza è garantita solo per un punto materiale)

Potenza

Il lavoro per unità di tempo si dice potenza.

$$\langle P\rangle = \frac{W}{\Delta t} \qquad P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

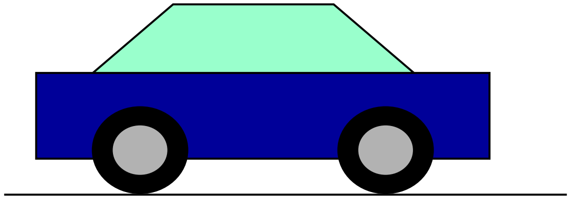
potenza media

potenza istantanea

si misura in Watt: $[P] = W = \frac{J}{s} = kg\,\frac{m^2}{s^3}$

grandezza scalare

Un'auto (m=1200kg) accelera da 0 a 100km/h in 6.0s. Determinare la potenza media erogata e la potenza istantanea massima nell'ipotesi di accelerazione costante.



$$\langle P\rangle = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\Delta E_K}{\Delta t} \cong 77\ kW$$

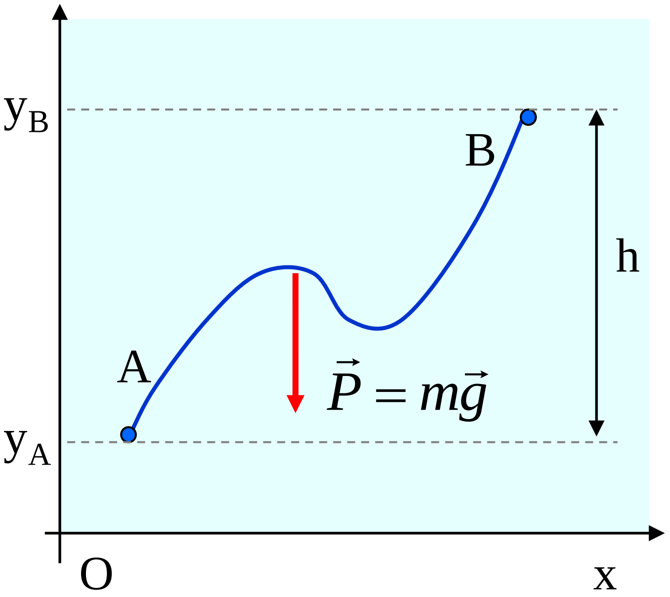
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 4.63\, m/s^2$$

$$F = ma = 5.56\, kN$$

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v} = Fv$$

$$P_{MAX} = Fv_{MAX} = 154\, kW$$

Lavoro di forze particolari - Forza peso



$$W = \int_{A,\ell}^{B} \vec{P}\cdot d\vec{s} = \vec{P}\cdot\int_{A,\ell}^{B} d\vec{s} = \vec{P}\cdot\overrightarrow{AB}$$

non dipende dal percorso, ma solo dagli estremi A e B

proprietà di ogni forza costante, non solo forza peso.

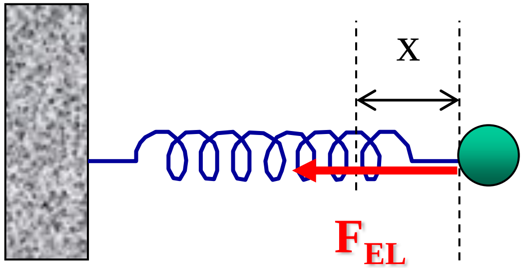
$$W = \underbrace{P_X}_{0}\ \underbrace{AB_X}_{x_B - x_A} + \underbrace{P_Y}_{-mg}\ \underbrace{AB_Y}_{y_B - y_A} = -mg\left(y_B - y_A\right)$$

$$W_P = -mg\left(y_B - y_A\right)$$

Se $y_f > y_i$ (il punto sale) il lavoro è negativo: l’energia cinetica diminuisce

Se $y_f < y_i$ (il punto scende) lavoro positivo: l’energia cinetica aumenta

Lavoro di forze particolari - Forza elastica



$$dW = -kx \cdot dx \Rightarrow \boxed{W = -\int_{x1}^{x2} kx\,dx = -\frac{k}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right)}$$

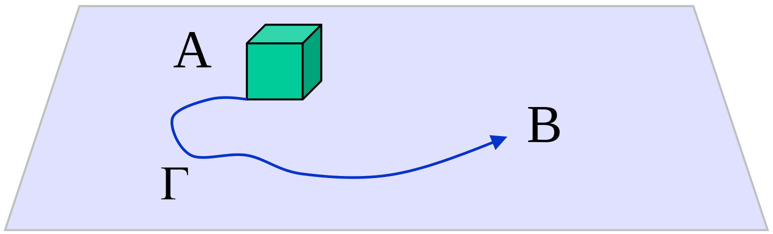
$$\boxed{W_{EL} = -\frac{k}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right)}$$

Dipende solo dalla posizione iniziale e finale.

$$\begin{cases} W_{EL} > 0 & |x_2| < |x_1| \quad \text{distensione} \\ W_{EL} < 0 & |x_2| > |x_1| \quad \text{compressione} \end{cases}$$

Lavoro di forze particolari - Forza di attrito dinamico

si consideri per semplicità il moto su un piano orizzontale, da A a B lungo la curva Γ.
Se l'unica forza verticale è la forza peso, il modulo di f_{AD} è costante.



$$dW = \vec{f}_D \cdot d\vec{s} = -f_D ds$$

opposta alla velocità

$\vec{v}\, dt$

$$\Rightarrow \quad W = \int_{A,\Gamma}^{B} -f_D ds = -f_D \int_{A,\Gamma}^{B} ds$$

$$\boxed{W_{AD} = -f_D \ell_\Gamma}$$

lunghezza del tragitto Γ

Il lavoro della forza di attrito dinamico $\begin{cases} \text{dipende dal tragitto} \\ \text{è sempre negativo} \end{cases}$

Forze conservative. Due definizioni equivalenti

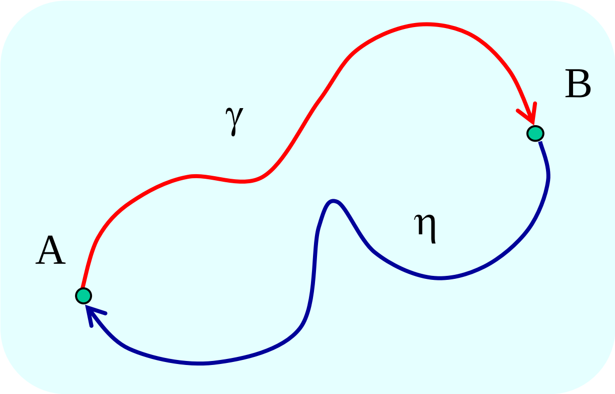
Le forze il cui lavoro non dipende dal tragitto hanno un ruolo importante; sono dette conservative

Def. 1 una forza si dice conservativa se il suo lavoro non dipende dal tragitto ma solo dalla posizione iniziale e finale

$$W_{AB,\gamma} = W_{AB,\eta} = W_{AB}$$

Def. 2 Una forza si dice conservativa se il suo lavoro lungo qualsiasi percorso chiuso è nullo

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$



Sono definizioni equivalenti. Infatti:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{B,\eta}^{A} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_{A,\eta}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

E' più corretto parlare di campi di forza: una forza conservativa può dipendere solo della posizione

Osservazione: non si può ottenere lavoro da una forza conservativa su un percorso chiuso.

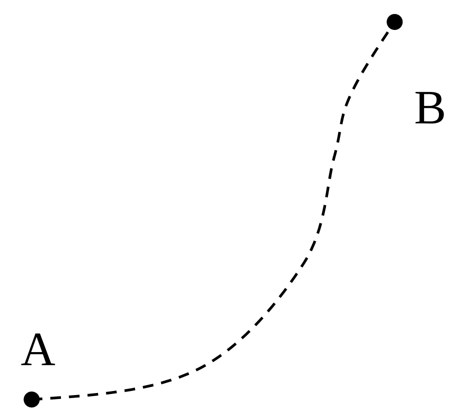
Energia potenziale (definizione “del libro”)

Se una forza è conservativa si può definire una funzione della posizione (E_P) tale che

$$\Delta E_P = E_P(B) - E_P(A) = -W_{AB}$$

Il lavoro della forza conservativa, cambiato di segno, è pari alla variazione di energia potenziale

la definizione ha senso perché W_{AB} non dipende dal tragitto



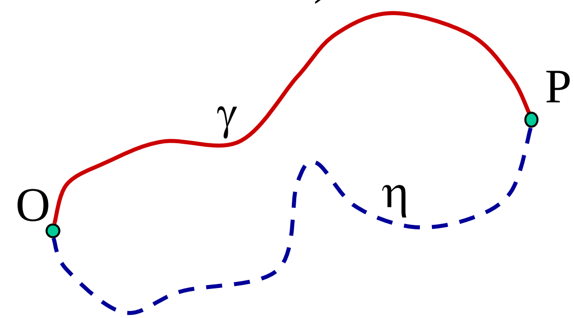
$E_P(P)$ è l’energia potenziale nel punto P

$[E_P]=[W]=J$ grandezza scalare

Osservazione: $E_P(P) \Leftrightarrow E_P(P)+k$

l’energia potenziale è definita a meno di una costante additiva.

Energia potenziale (Altra definizione)



Un modo forse più intuitivo di definire l'energia potenziale della forza conservativa **F**:

- Si sceglie un punto O arbitrario
- Si <u>definisce</u> $E_P(O) = E_{P0}$ arbitrario
- Nel punto P, E_P vale:

$$E_P(P) = E_{P0} - \int_O^P \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

- La definizione ha senso perché l'integrale non dipende dal tragitto
- L'energia potenziale è definita a meno della costante additiva E_{P0}
- Il lavoro W_{AB} si può esprimere in funzione di E_P calcolata in A e in B:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^O \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_O^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\left(\cancel{E_{PO}} - E_P(A)\right) + \left(\cancel{E_{PO}} - E_P(B)\right) = -\Delta E_P$$

L'arbitrarietà della costante non è un problema: hanno senso solo le variazioni di energia potenziale

Energia Potenziale della forza peso

Dalla definizione di energia potenziale: $W = E_{Pi} - E_{Pf}$

nel caso della forza peso: $W = mgy_i - mgy_f$

ogni funzione E_P del tipo $E_P = mgy + \text{cost}$ soddisfa le condizioni

costante arbitraria

y è la coordinata su un asse verticale orientato «in su» (cioè opposto a **g**)

Che E_P sia definita a meno di una costante arbitraria appare anche dal fatto che l'origine dell'asse y si può scegliere in modo arbitrario

Osservazioni:

- $\Delta E_P > 0$ se $\Delta y > 0$ ($W < 0$ e quindi $\Delta E_K < 0$)
- $\Delta E_P < 0$ se $\Delta y < 0$ ($W > 0$ e quindi $\Delta E_K > 0$)

Energia potenziale elastica

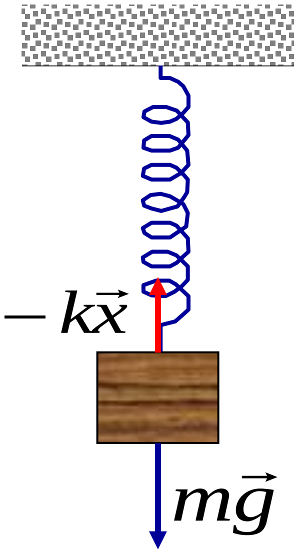
Dalla definizione di energia potenziale: $W = E_{Pi} - E_{Pf}$

nel caso della forza elastica: $W = -\frac{k}{2}x_f^2 + \frac{k}{2}x_i^2$

Dal confronto delle due espressioni si ricava: $E_P = \frac{k}{2}x^2$ + cost.

In genere si pone cost=0 (E_P nulla se la molla è a riposo)

Caso di più forze conservative



$$W = W_P + W_E = -\Delta E_{PP} - \Delta E_{PE} = -\Delta E_{PTOT}$$

forza peso   forza elastica

con $$E_{PTOT} = E_{PP} + E_{PE}$$

In presenza di più forze conservative l'energia potenziale è la somma delle energie potenziali.

Teorema di conservazione dell'energia meccanica

Teorema dell'energia cinetica: $W = \Delta E_K$

Se le forze sono tutte conservative $W = -\Delta E_P$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_K = -\Delta E_P$$

$$E_{KF} - E_{KI} = E_{PI} - E_{PF}$$

$$\boxed{E_{KF} + E_{PF} = E_{KI} + E_{PI}}$$

$$\boxed{E_{MF} = E_{MI}}$$

Definizione: Energia meccanica: $E_M = E_K + E_P$

In altri termini:

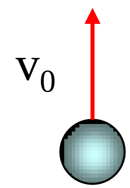
Se un corpo è soggetto a sole forze conservative, la sua energia meccanica è costante

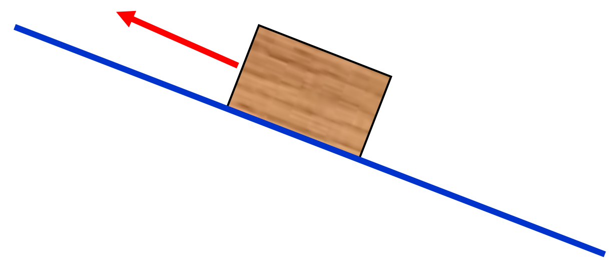
Conservazione dell'energia meccanica

Esempio con la forza peso.

corpo lanciato lungo una guida liscia qualsiasi

Corpo lanciato verso l'alto





Corpo lanciato verso l'alto lungo un piano inclinato liscio.

Qual è l'altezza massima che può essere raggiunta?

$$\left.\begin{aligned} E_i &= E_{Ki} + E_{Pi} = \frac{m}{2} v_0^2 + 0 \\ E_f &= E_{Kf} + E_{Pf} = 0 + mgh \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{m}{2} v_0^2 = mgh$$

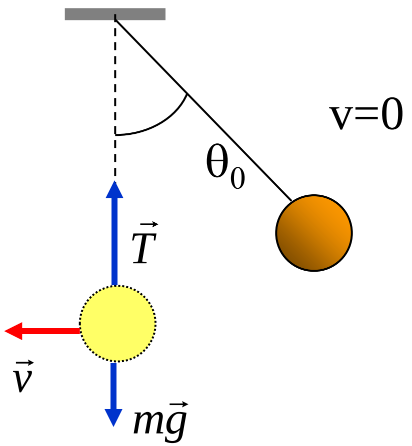
$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

il risultato non dipende dai dettagli del moto ma dalla conservazione dell'energia meccanica

Conservazione dell'energia meccanica

Pendolo lasciato andare da un'inclinazione θ_0 rispetto alla verticale. Calcolare la velocità nel punto più basso

Pendolo.



$$\left.\begin{aligned} E_i &= E_{Ki} + E_{Pi} = 0 - mg\ell\cos\theta_0 \\ E_f &= E_{Kf} + E_{Pf} = \frac{m}{2}v_{\max}^2 - mg\ell \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2}v_{\max}^2 = mg\ell(1-\cos\theta_0)$$

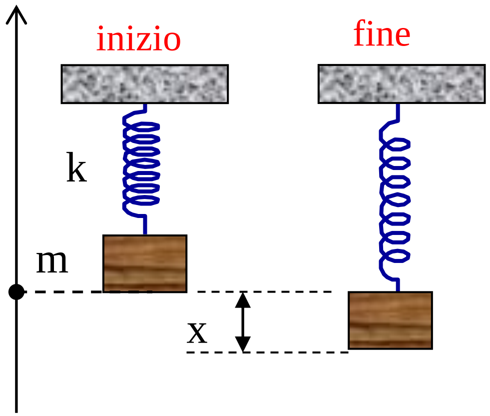
Nota: Queste non sono piccole oscillazioni

Quanto vale la tensione del filo nel punto più basso?

$$T - mg = ma_N \qquad a_N = \frac{v^2}{\ell} \qquad T = mg\left(3 - 2\cos\theta_0\right)$$

velocità e tensione ad un angolo generico?

Conservazione dell'energia meccanica

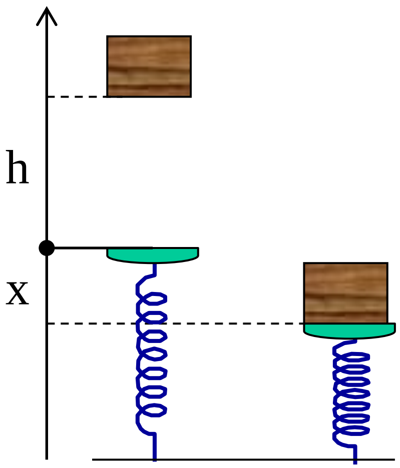


La massa m è lasciata andare con $v_i=0$ e molla a riposo.
Trovare l'allungamento massimo della molla

$$E_i = E_{Ki} + E_{Pi} = 0 + 0$$

$$E_f = E_{Kf} + E_{Pf} = 0 + \left(\frac{k}{2} x^2 + mgx \right)$$

$$x_{Max} = -2\frac{mg}{k}$$ ← doppio dell'allungamento all'equilibrio



compressione massima della molla?

Forze conservative ed Energia potenziale

Si è visto come si ricava l'energia potenziale data una forza conservativa.
Consideriamo il problema inverso: ricavare la forza (conservativa) data l'energia potenziale

$$dE_P = -dW = -\vec{F}\cdot d\vec{s} = -F_X dx - F_Y dy - F_Z dz$$

se si considera uno spostamento lungo x: dy = dz = 0

$$dE_P = -F_X dx \quad \Rightarrow \quad F_X = -\frac{\partial E_P}{\partial x}$$

$$\begin{cases} F_X = -\dfrac{\partial E_P}{\partial x} \\ F_Y = -\dfrac{\partial E_P}{\partial y} \\ F_Z = -\dfrac{\partial E_P}{\partial z} \end{cases}$$

si riassume dicendo

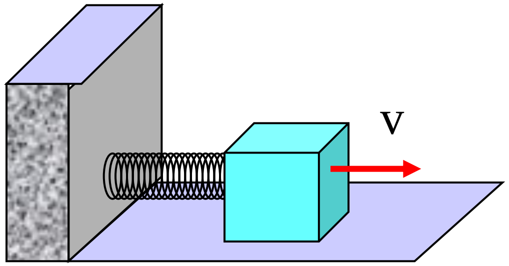
$$\vec{F} = -\mathrm{grad}\left(E_P\right) = -\vec{\nabla} E_P$$

In un caso 1D $F_X = -\dfrac{dE_P}{dx}$

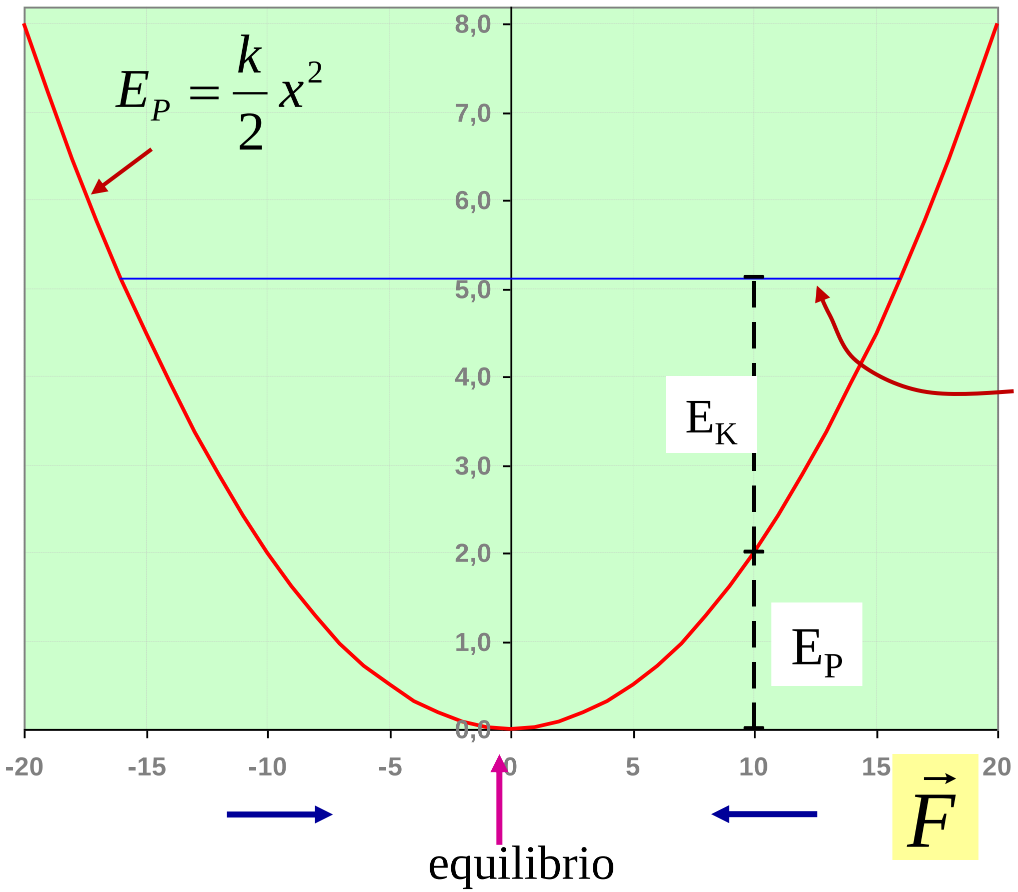
Esempi ….

La forza (conservativa) è sempre diretta nel verso di E_P decrescente.

Grafico dell'Energia (caso 1D)

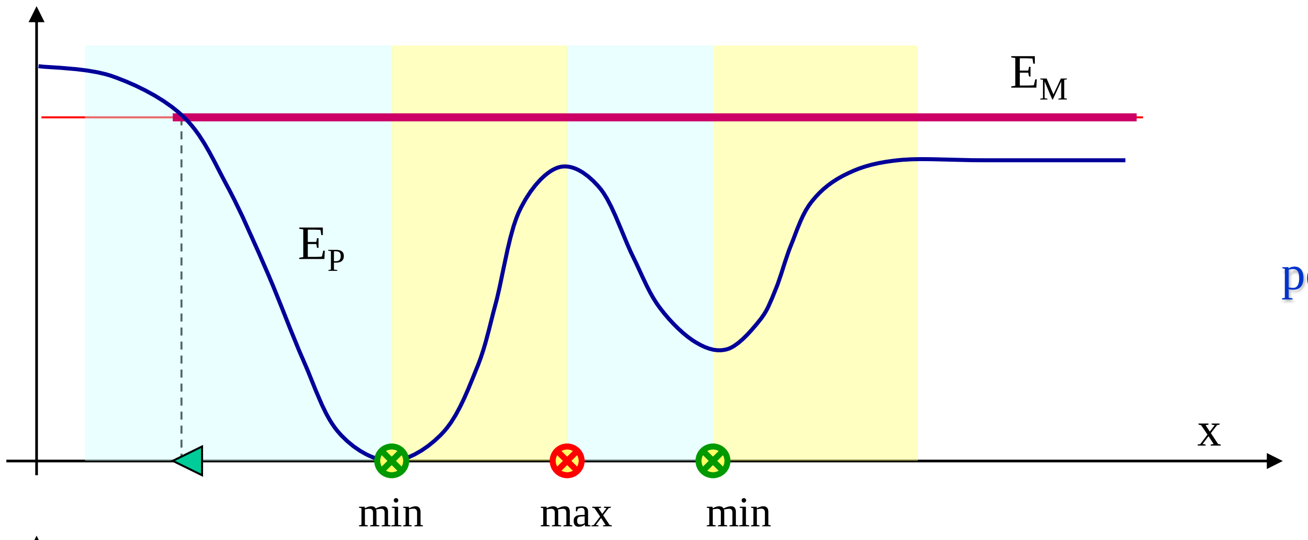


massa m vincolata all'estremo
di una molla ideale di costante k
su piano orizzontale liscio.

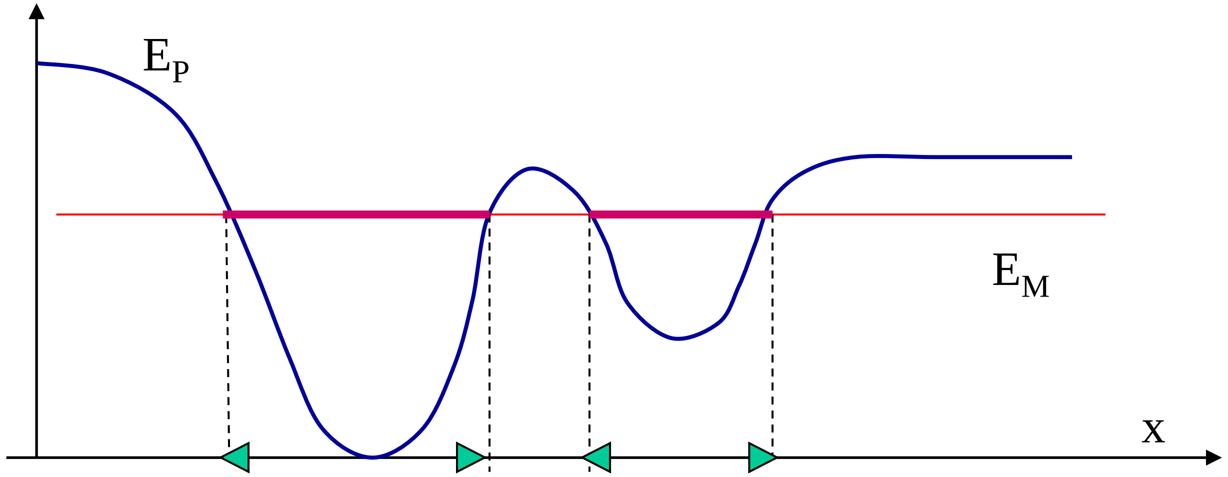


$$E_M = \frac{k}{2}x^2 + \frac{m}{2}v^2 = \text{cost}$$

Grafico dell'Energia (caso 1D)



posizioni di equilibrio



punti di inversione

Energia meccanica in presenza di forze NON conservative

Teorema dell'energia cinetica:

$$W_{TOT} = W_C + W_{NC} = \Delta E_K$$

lavoro delle forze conservative — $-\Delta E_P$

lavoro delle forze non conservative

$$\Rightarrow \quad W_{NC} = \Delta E_K + \Delta E_P$$

$$\boxed{W_{NC} = \Delta E_M}$$

Il lavoro delle forze non conservative produce una variazione di energia meccanica.

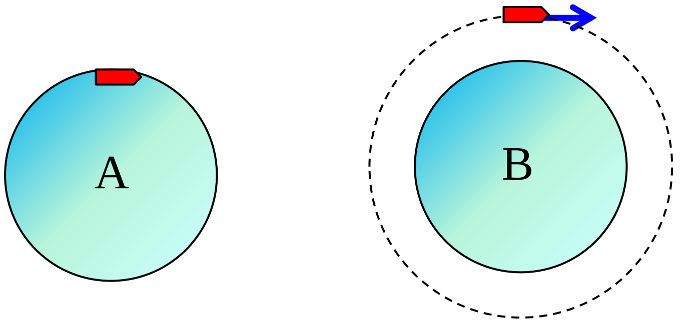
L'energia meccanica di un sistema può essere modificata solo mediante il lavoro di forze non conservative.

Quali sono le forze non conservative?

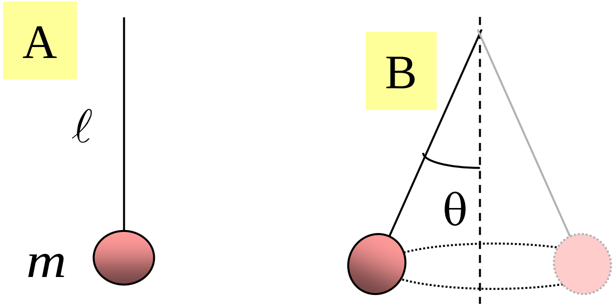
Oltre alle forze di attrito (radente o viscoso), resistenza del mezzo ...
consideriamo non conservative anche le "forze applicate" (muscolare, motore ...)

Energia meccanica in presenza di forze NON conservative

che lavoro si deve fare per mettere in orbita un satellite?



che lavoro si deve fare per portare il pendolo dallo stato A allo stato B?



il lavoro della «forza applicata» (o «esterna») F, considerata non conservativa, è

$$W_F = \Delta E_M = \Delta E_K + \Delta E_P$$

Se l'energia cinetica non varia (ad es. lavoro necessario per sollevare un oggetto)

$$W_F = \Delta E_P$$