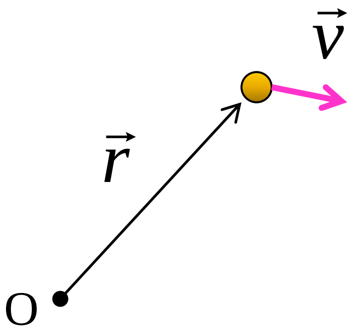
Momenti



punto materiale di massa m nella posizione **r**, con velocità **v**:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

moltiplicando vettorialmente per il vettore posizione **r**

$$\underbrace{\vec{r}\times\vec{F}}_{\text{momento della forza}} = \vec{r}\times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\vec{r}\times m\vec{v}\right)}_{\text{momento angolare}}$$

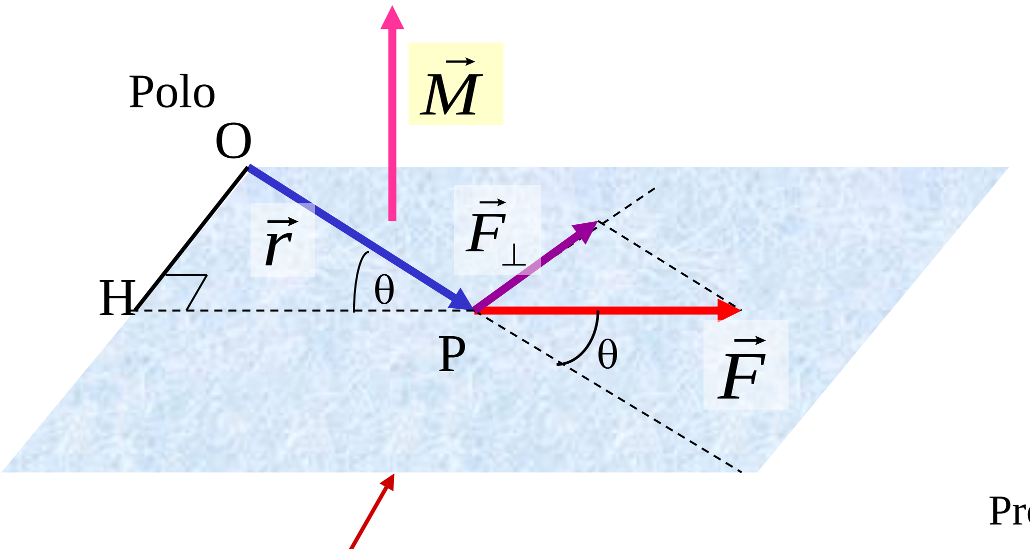
poiché

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times m\vec{v}\right) = \cancel{\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}}\times m\vec{v}} + \vec{r}\times\frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

questi concetti si riveleranno molto utili nello studio di sistemi materiali più complessi del punto materiale, ma anche per un punto materiale, come nel caso di forze centrali (v.)

Momento di una Forza

Momento della forza F applicata nel punto P calcolato rispetto al punto O (polo):



Piano definito da **OP** e **F**

$$\vec{M} = \overrightarrow{OP} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$

grandezza vettoriale

$$[M] = Nm = kg\frac{m^2}{s^2}$$

Prodotto vettore: attenzione all'ordine dei fattori

- Direzione**:** ortogonale a **r** e **F**
- Verso: regola della mano destra
- modulo, direzione e verso dipendono dalla scelta arbitraria di O

$$M = rF\sin\theta$$

$$M = rF_\perp$$

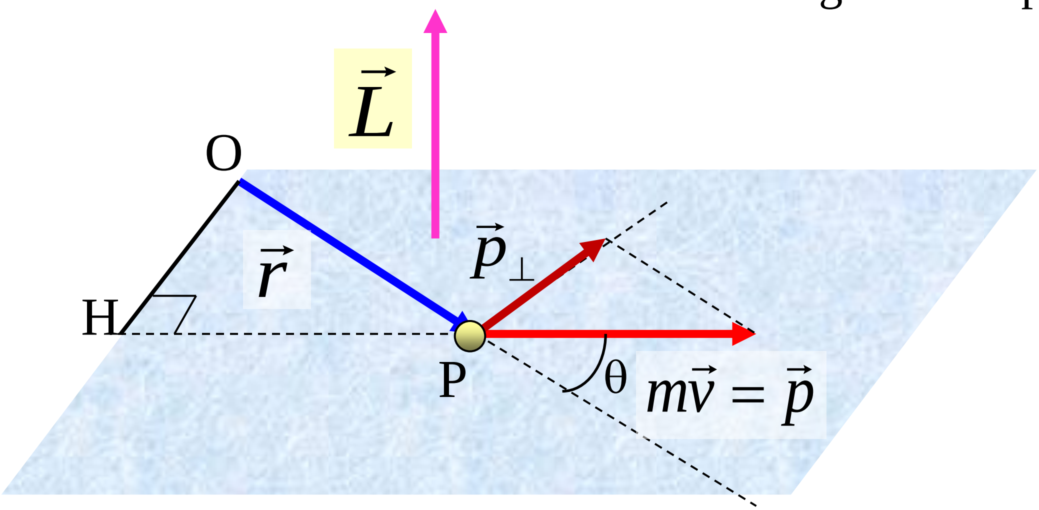
braccio della forza

$$M = F\,r_\perp = F \cdot OH = Fb$$

Braccio della forza: distanza del polo O dalla retta di applicazione della forza.

Momento Angolare

momento angolare del punto materiale m rispetto al "polo" O:



$$\vec{L} = \overrightarrow{OP} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}$$

grandezza vettoriale

$$[L] = kg\,\frac{m^2}{s}$$

- **Direzione**: ortogonale a **r** e **v**
- Verso: regola della mano destra
- modulo, direzione e verso dipendono dalla scelta arbitraria di O

$$L = r\,mv\sin\theta$$

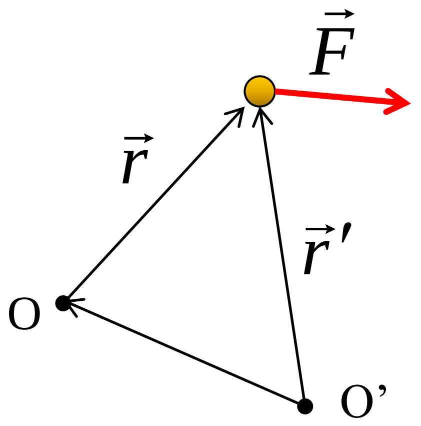
$$L = rmv_\perp$$

$$L = mv\,r_\perp = mv \cdot OH = mvb$$

Teorema del momento angolare

riassumendo:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$



i momenti dipendono dal polo O:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \overrightarrow{OO'} \times \vec{F}$$

e analogamente per il momento angolare **L**

M e L devono essere calcolati rispetto allo stesso polo)

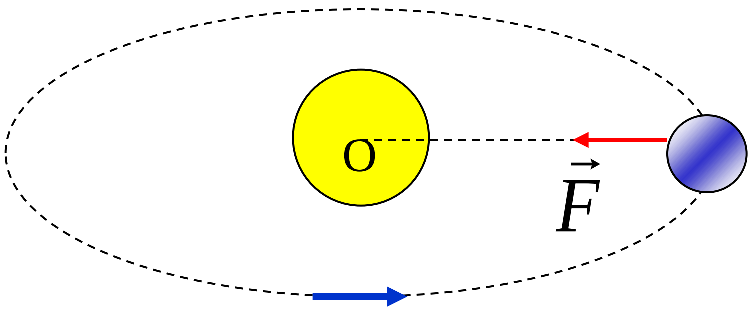
Nel caso di un punto materiale tutte le forze hanno lo stesso punto di applicazione e M è il momento della forza totale o risultante, ma ciò non è vero in generale

Se il momento delle forze è nullo, il momento angolare è costante (conservazione del momento angolare) e ciò avviene anche se la forza è diversa da zero: ad es. basta che la forza F sia diretta verso il polo O)

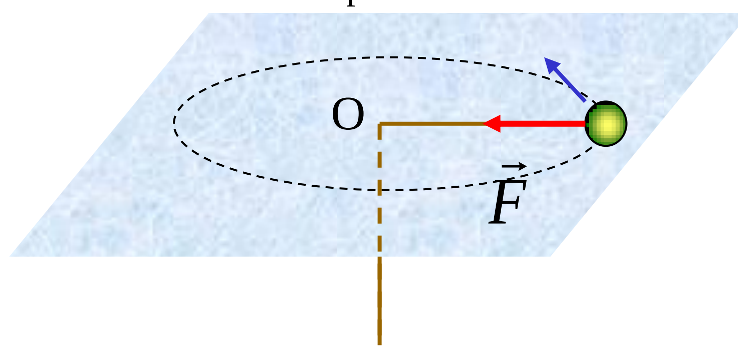
Campo di Forza Centrale.

Forza ovunque diretta verso un punto fisso O detto centro di forza
il cui modulo dipende solo dalla distanza da O

Es. forza gravitazionale, forza elastica (molla con estremo fisso), tensione di un filo con un estremo fisso



piano orizzontale liscio



il momento della forza, calcolato rispetto al centro di forza O è nullo: $\vec{M}_O = 0$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O = 0 \Rightarrow \vec{L}_O = \text{cost}$$

il momento angolare è costante (si conserva)
se calcolato rispetto al centro di forza

Campo Gravitazionale

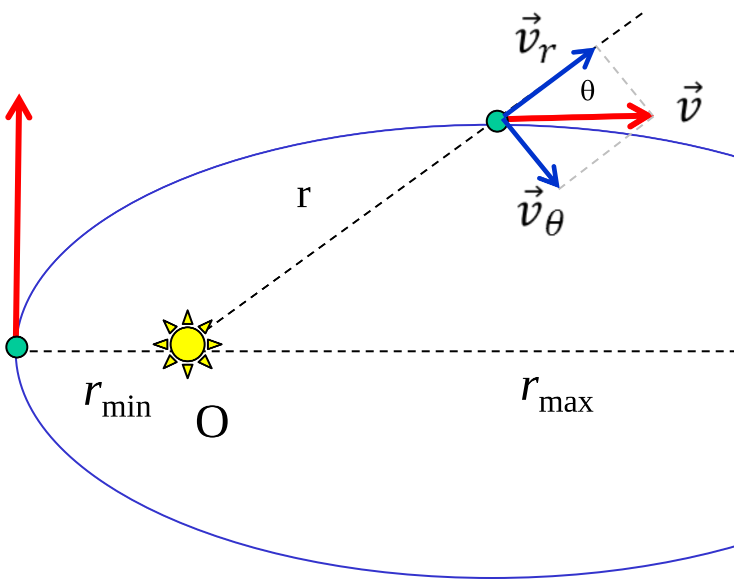
Siamo in grado di rispondere alla domanda: perché i pianeti non «cadono» sul Sole?

Forza conservativa: conservazione dell'energia meccanica:

$$E_M = \frac{m}{2}v^2 - \gamma\frac{Mm}{r}$$

Forza centrale: conservazione del momento angolare (risp. al sole)

$$L = mrv_\theta$$



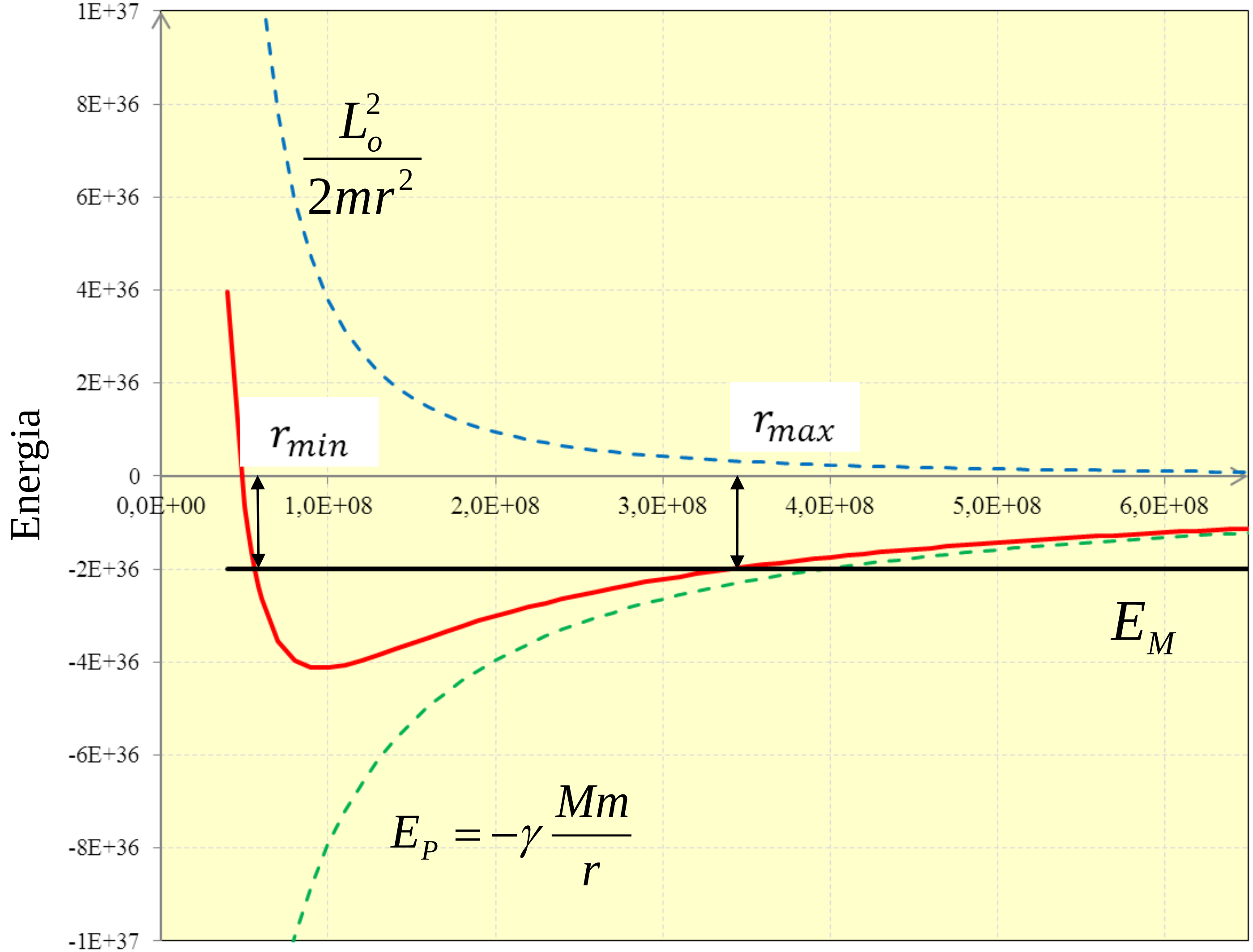
$$E_K = \frac{m}{2}v_r^2 + \frac{m}{2}v_\theta^2$$

ovvero

$$E_K = \frac{m}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2mr^2}$$

$$E_M = \frac{m}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \gamma\frac{Mm}{r} = \text{cost}$$

Campo Gravitazionale



L'orbita del pianeta è compresa fra un minimo e un massimo.
Se l'energia meccanica corrisponde al minimo della curva rossa $r_{min} = r_{max}$ (circonferenza)

Teorema del momento angolare

Formulazione integrale

$$d\vec{L} = \vec{M}dt \Rightarrow \boxed{\Delta\vec{L} = \int \vec{M}dt}$$

Impulso del momento

$$\vec{L}_f - \vec{L}_i$$

$$\Delta\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{F}\, dt$$

Se il punto di applicazione della forza non si sposta nell'intervallo Δt di applicazione (forza impulsiva)

$$\Delta\vec{L} = \vec{r} \times \int \vec{F}\, dt = \underbrace{\vec{r} \times \vec{J}}$$

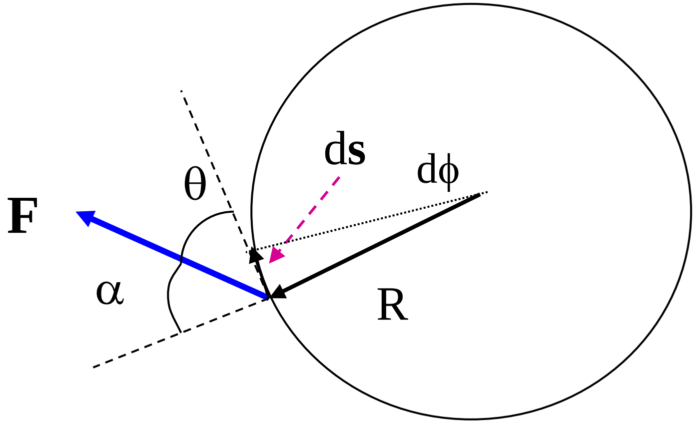
Momento dell'impulso

$$\boxed{\Delta\vec{L} = \vec{r} \times \vec{J}}$$

Teorema del momento dell'impulso

Lavoro in un moto circolare

Il lavoro si può esprimere in funzione del momento delle forze



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$dW = F_T ds = F_T R d\varphi = M d\varphi$$

In conclusione: $W = \int M d\varphi$

Se M costante $W = M \cdot \Delta\varphi$