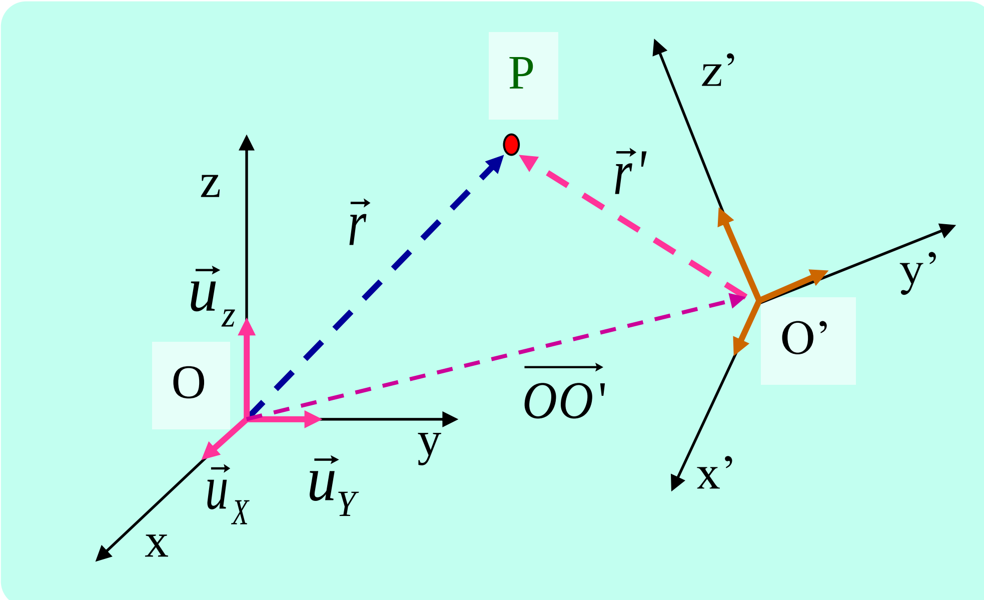
Moti relativi



Moto di un punto P osservato da due sistemi di riferimento, O e O'

consideriamo O «fisso» e O' mobile.

O' può ruotare rispetto ad O

Posizioni relative: $\vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}\,'$

Velocità relative: $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \dfrac{d\vec{r}\,'}{dt}$ con $\vec{r}\,' = x'\,\vec{u}_X' + y'\vec{u}_Y' + z'\vec{u}_Z'$

i versori degli assi di O' possono ruotare

Teorema delle velocità relative. (Dimostrazione facoltativa)

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \overbrace{\left(\frac{dx'}{dt}\vec{u}'_X + x'\frac{d\vec{u}'_X}{dt} \right)}^{\frac{d(x'\vec{u}'_X)}{dt}} + \overbrace{\left(\frac{dy'}{dt}\vec{u}'_Y + y'\frac{d\vec{u}'_Y}{dt} \right)}^{\frac{d(y'\vec{u}'_Y)}{dt}} + \overbrace{\left(\frac{dz'}{dt}\vec{u}'_Z + z'\frac{d\vec{u}'_Z}{dt} \right)}^{\frac{d(z'\vec{u}'_Z)}{dt}}$$

dove

$$\frac{dx'}{dt}\vec{u}'_X + \frac{dy'}{dt}\vec{u}'_Y + \frac{dz'}{dt}\vec{u}'_Z = \vec{v}'$$

la derivata dei versori vale $\boxed{\frac{d\vec{u}'_X}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}'_X}$ ecc.

combinando i risultati: $\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \underbrace{\vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'}_{\text{velocità di trascinamento}}}$ Teorema delle velocità relative

velocità di trascinamento

(velocità di un punto fermo in O’ nella posizione r’)

Teorema delle accelerazioni relative

analogamente:

$$\underbrace{\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\,' + 2\vec{\omega}\times\vec{v}\,'}$$

accelerazione di trascinamento

poiché ci limiteremo al caso di velocità angolare costante (in modulo, direzione e verso) <u>semplifichiamo</u>:

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right) + 2\vec{\omega}\times\vec{v}\,'$$

$$\vec{a}\,' = \vec{a} - \vec{a}_{O'} - \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right) - 2\vec{\omega}\times\vec{v}\,'$$

$-\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right)$ accelerazione centrifuga. In modulo $\omega^2 r_\perp$

$-2\vec{\omega}\times\vec{v}\,'$ accelerazione di Coriolis

Relatività newtoniana, superata dal 1902; resta una buona approssimazione in molti casi pratici

Velocità e accelerazione di un punto rispetto ad un altro punto

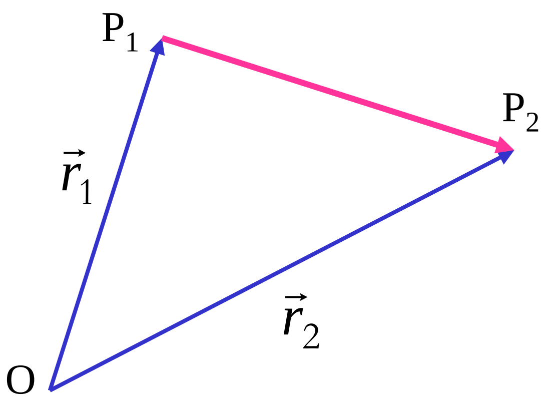
Velocità e accelerazione del punto P_2 rispetto al punto P_1:

corrispondono alla derivata 1ª e 2ª rispetto al tempo del vettore P_1P_2 (che punta da P_1 a P_2)

$$\vec{r}_{1,2} = \overrightarrow{P_1P_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\vec{v}_{1,2} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

$$\vec{a}_{1,2} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right) = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$$



come si vede sono quantità definite nel riferimento «fisso»

corrispondono a velocità e accelerazione di P_2 visti da P_1, in assenza di rotazioni

Sistemi di riferimento inerziali e non inerziali

In un sistema inerziale (**O**) il moto di un punto materiale è descritto da $m\vec{a} = \vec{F}$

in un sistema O' in moto rispetto ad O $\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_{O'} - 2\vec{\omega}\times\vec{v}' - \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)$

Moltiplicando per m

$$m\vec{a}' = \vec{F} \underbrace{- m\left[\vec{a}_{O'} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)\right]}$$

forza apparente o fittizia detta anche forza inerziale

La forza F osservata nel sistema inerziale è una forza «vera» o «reale»
le forze apparenti sono dovute esclusivamente al moto di O'.

Nota: all'osservatore O**'** le forze apparenti possono sembrare perfettamente reali (ad es. può misurarle) e la descrizione del moto ottenuta mediante queste forze è perfettamente consistente.

sono apparenti nel senso che non sono riconducibili alle interazioni fondamentali, cioè non sono riconducibili all'interazione fra la massa m e gli altri corpi

Sistemi di riferimento inerziali e non inerziali

le forze apparenti $$\vec{F}_{APP} = m\left[-\vec{a}_{O'} - \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right) - 2\vec{\omega}\times\vec{v}\,'\right]$$

sono nulle se $$\begin{cases} \vec{a}_{O'} = 0 \\ \vec{\omega} = 0 \end{cases}$$

$\leftarrow$ O' è in moto uniforme rispetto ad O

$\leftarrow$ il sistema O' non ruota

le leggi del moto (2ª L. di Newton) sono identiche nei due sistemi: $$\begin{cases} \vec{a}\,' = \vec{a} \\ \vec{F} = m\vec{a}\,' \end{cases}$$

tutti i sistemi in moto rettilineo uniforme rispetto ad un sistema inerziale sono inerziali

Non solo le leggi del moto sono identiche in tutti i sistemi inerziali, ma si ritiene che valga il

Principio di Relatività

le leggi fisiche sono identiche in tutti i sistemi inerziali

ovvero

non è possibile discriminare fra diversi sistemi inerziali

(ad es. decidere quale è in moto e quale fermo)

Così si esprimeva Galileo Galilei

Dialogo dei Massimi Sistemi.

Riserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi de' pescetti; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vadia versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non piú gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze sieno eguali; e saltando voi, come si dice, a piè giunti, eguali spazii passerete verso tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia che mentre il vassello sta fermo non debbano succeder cosí, fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma: voi saltando passerete nel tavolato i medesimi spazii che prima, né, perché la nave si muova velocissimamente, farete maggior salti verso la poppa che verso la prua, benché, nel tempo che voi state in aria, il tavolato sottopostovi scorra verso la parte contraria al vostro salto; e gettando alcuna cosa al compagno, non con piú forza bisognerà tirarla, per arrivarlo, se egli sarà verso la prua e voi verso poppa, che se voi fuste situati per l'opposito; le gocciole cadranno come prima nel vaso inferiore, senza caderne pur una verso poppa, benché, mentre la gocciola è per aria, la nave scorra molti palmi; i pesci nella lor acqua non con piú fatica noteranno verso la precedente che verso la sussequente parte del vaso, ma con pari agevolezza verranno al cibo posto su qualsivoglia luogo dell'orlo del vaso; e finalmente le farfalle e le mosche continueranno i lor voli indifferentemente verso tutte le parti, né mai accaderà che si riduchino verso la parete che riguarda la poppa, quasi che fussero stracche in tener dietro al veloce corso della nave, dalla quale per lungo tempo, trattenendosi per aria, saranno state separate; e se abbruciando alcuna lagrima d'incenso si farà un poco di fumo, vedrassi ascender in alto ed a guisa di nugoletta trattenervisi, e indifferentemente muoversi non piú verso questa che quella parte. ...

1. Trascinamento rettilineo uniforme

$$\begin{cases} \vec{v}_{o'} = \text{cost} \\ \vec{\omega} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_{o'} = 0 \\ \vec{a}_{CF} = 0 \\ \vec{a}_{COR} = 0 \end{cases}$$

ed il moto soddisfa la stessa equazione $\vec{F} = m\vec{a}$

senza forze apparenti

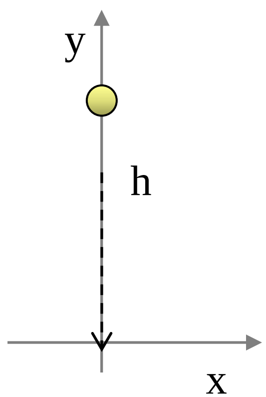
Tuttavia cambiano le condizioni iniziali $\vec{v}_0' = \vec{v}_0 - \vec{v}_{o'}$

$$\begin{cases} \vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{o'} \\ \vec{a}' = \vec{a} \end{cases}$$

Esempio. Un oggetto è lasciato cadere **in O** da un'altezza h, con velocità iniziale nulla. Descrivere il moto del corpo per l'**osservatore O** e per un **osservatore O'** che ha velocità costante $\boldsymbol{v_{O'}}$ (orizz.) risp. ad O.

Sistema O

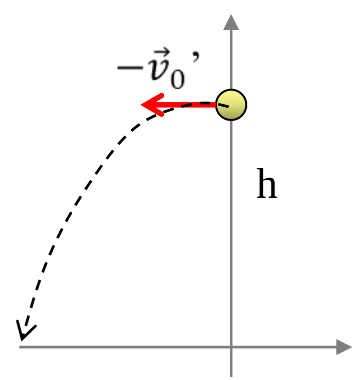
$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = h \end{cases} \quad \begin{cases} v_{0x} = 0 \\ v_{0y} = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = h - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Sistema O'

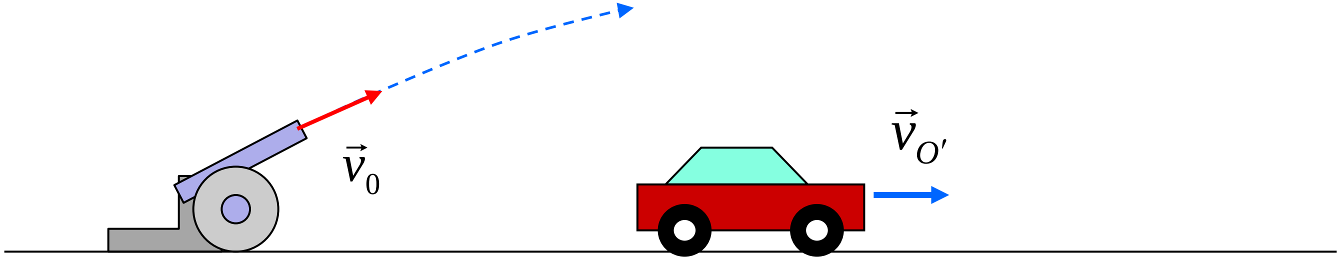
$$\begin{cases} x_0' = 0 \\ y_0' = h \end{cases} \quad \begin{cases} v_{0x}' = -v_{o'} \\ v_{0y}' = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x' = -v_{o'} t \\ y' = h - \dfrac{g}{2} t^2 \end{cases}$$

1. Trascinamento rettilineo uniforme

Esempio più difficile. Un cannone spara un proiettile con velocità v_P=300m/s con alzo 45°. Descrivere il moto del proiettile come appare ad un osservatore che viaggia a 144 km/h nello stesso verso del lancio



Moto visto da O

$$v_{0X} = v_0 \cos\theta = 212\, m/s$$
$$v_{0Y} = v_0 \sin\theta = 212\, m/s$$

$$\Delta t = 2 v_{0Y}/g = 43 s$$
$$y_{\max} = \frac{v_{0Y}^2}{2g} = 2290\, m$$
$$x_G = 2\frac{v_{0X} v_{0Y}}{g} = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta$$
$$x_G = 9180\, m$$

Moto visto da O'

$$v'_{0X} = v_{0X} - v_{O'} = 172\, m/s$$
$$v'_{0Y} = v_{0Y} = 212\, m/s$$
$$\theta' = \mathrm{atan}\left(v'_{0Y}/v'_{0X}\right) = 50.9°$$
$$v'_0 = \sqrt{v'^2_{0X} + v'^2_{0Y}} = 273\, m/s$$

$$\Delta t' = \Delta t$$
$$y'_{\max} = y_{\max}$$
$$x'_G = 2\frac{v'_{0X} v'_{0Y}}{g} = \frac{v'^2_0}{g}\sin 2\theta'$$
$$x'_G = 7450\, m$$

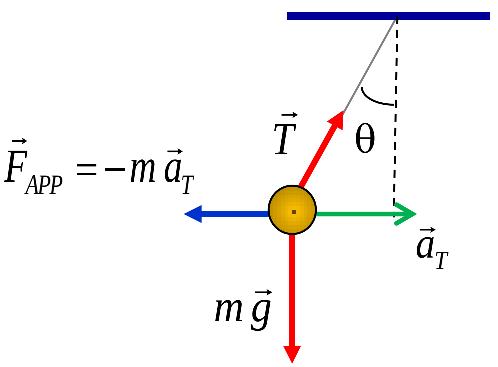
Notare che per l'osservatore O' cambia l'angolo di tiro

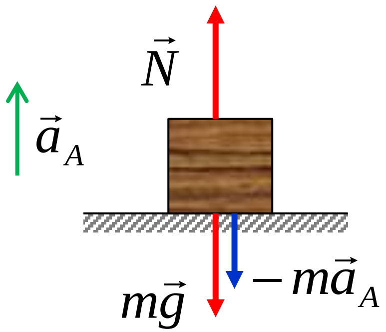
2. Trascinamento rettilineo uniformemente accelerato

$$\begin{cases} \vec{a}_{o'} = \text{cost} \\ \vec{\omega} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_{CF} = 0 \\ \vec{a}_{COR} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{F} - m\vec{a}_{o'} = m\vec{a}'$$

in questo sistema di riferimento agisce una Forza apparente: $\vec{F}_{APP} = -m\vec{a}_{o'}$





corpo sospeso in un treno con accelerazione costante a_T

corpo sul pavimento di un ascensore che accelera in su

2. Trascinamento rettilineo uniformemente accelerato

Esempio. Un oggetto è lasciato cadere da y(0)=h **in O**, con velocità iniziale nulla. Descrivere il moto osservato da una persona in moto (sist. **O'**) con accelerazione costante $a_{o'}$ e velocità iniziale $v_{o'}$.
Si supponga che i due sistemi concidano per t=0.

$$\begin{cases} a_{o'} = \text{cost} \\ \vec{\omega} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_{CF} = 0 \\ \vec{a}_{COR} = 0 \end{cases}$$

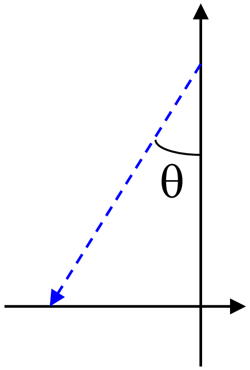
in O: $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = h \end{cases} \quad \begin{cases} v_{0x} = 0 \\ v_{0y} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

in O': $\begin{cases} x'_0 = 0 \\ y'_0 = h \end{cases} \quad \begin{cases} v'_{0x} = -v_{o'} \\ v'_{0y} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a'_x = -a_{o'} \\ a'_y = -g \end{cases}$

$$\begin{cases} x(t) = v_{o'} t - \frac{a_{o'}}{2} t^2 \\ y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Se $v_{o'} = 0$ $\begin{cases} x' = -\frac{a_{o'}}{2} t^2 \\ y' = h - \frac{g}{2} t^2 \end{cases}$



$$\tan\theta = \frac{a_{o'}}{g}$$

3. Trascinamento rotatorio uniforme (con centro di rotazione fisso)

$$\begin{cases} \vec{a}_{o'} = 0 \\ v_{o'} = 0 \\ \vec{\omega} = \text{cost} \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{a}' = \vec{a} - \cancel{\vec{a}_{O'}} - 2\vec{\omega}\times\vec{v}\,' - \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right) - \cancel{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}\times\vec{r}\,'}$$

accelerazione di Coriolis

accelerazione centrifuga

Si supponga, per semplicità, che **O** e **O'** (origini degli assi) coincidano: $\boxed{\vec{r}\,' = \vec{r}}$

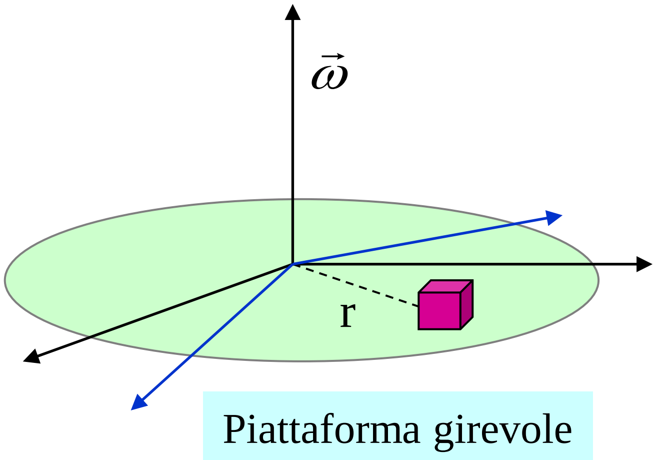
oltre alle forze reali, in questo riferimento bisognerà considerare anche

Forza centrifuga $\boxed{\vec{F}_{CF} = -m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)}$ $\quad F_{CF} = m\omega^2 r_\perp$

Forza di Coriolis $\boxed{\vec{F}_{COR} = -2m\,\vec{\omega}\times\vec{v}\,'}$ $\quad F_{COR} = 2m\omega v'_\perp$

3. Trascinamento rotatorio uniforme con origine fissa

Es. 1. Corpo fermo in **O**. **O'** ruota con velocità angolare costante **ω**.



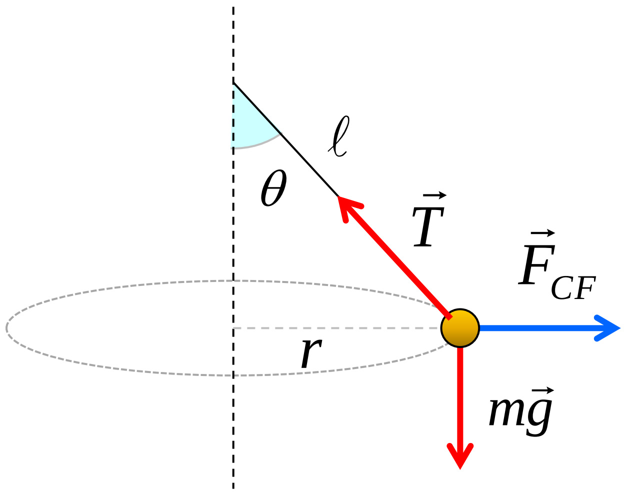
$$\begin{cases} \vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{\omega}\times\vec{r} \\ \vec{a}\,' = \vec{a} - 2\omega\times\vec{v}\,' - \omega\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{v} = 0 \\ \vec{a} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{v}\,' = -\vec{\omega}\times\vec{r} \\ \vec{a}\,' = \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) \end{cases}$$

moto circolare uniforme

con velocità angolare $-\vec{\omega}$

accelerazione centripeta!



Es. 2. Pendolo conico

Date m, ℓ, ω, determinare l'angolo θ.

Assenza di "peso" su un satellite in orbita circolare intorno alla terra.

Dalla Stazione Spaziale Internazionale

g=0?

la Stazione Spaziale è in orbita a circa 390km dalla superficie terrestre.

$$g = G\frac{M}{r^2} = 8.7 m/s^2$$

(89% di 9.8m/s^2)

r = R+h

Si consideri il Sistema di Riferimento mobile O' (stazione spaziale), in orbita circolare, non rotante su sè stesso (ω=0)

approssimazioni

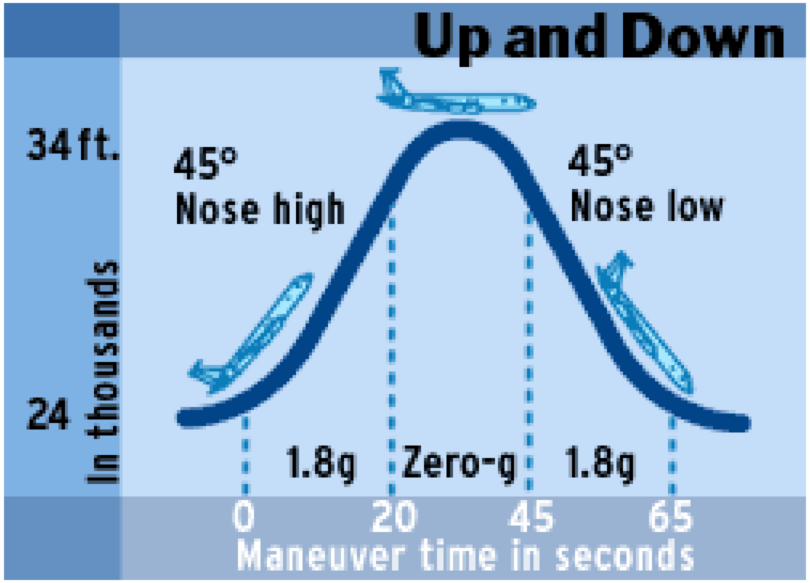
Per un oggetto lasciato a sè stesso in O': $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{o'}$

$a_{O'}$= accelerazione dell'astronave rispetto al sistema inerziale O: $\vec{a}_{O'} = \vec{g}(\vec{r}_{O'})$

a' = accelerazione dell'oggettto rispetto al sistema inerziale O: $\vec{a} = \vec{g}(\vec{r}_{O'})$

$\vec{a}' = 0$ quindi sembra che nessuna forza agisca sull'oggetto in O'

Altri casi di assenza di peso



Se un aereo segue una traiettoria parabolica, identica a quella che seguirebbe un proiettile in assenza d'aria

$$\vec{a}_{o'} = \vec{g}$$ accelerazione dell'aereo

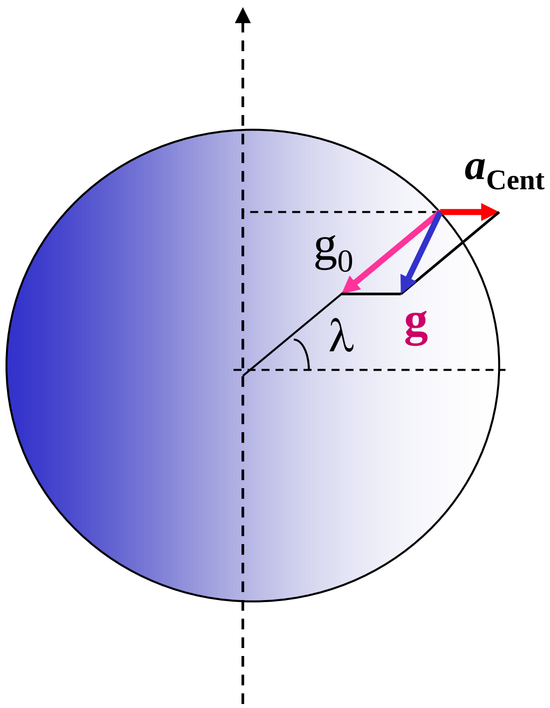
$$\vec{a} = \vec{g}$$ accelerazione di un oggetto libero sull'aereo, rispetto al riferimento fisso (suolo)

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{o'}} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}' = 0$$

Un oggetto lasciato libero sull'aereo che segue una traiettoria "da proiettile" ha accelerazione nulla rispetto all'aereo. Una persona sull'aereo si trova in condizioni di "assenza di peso".

3. Trascinamento rotatorio uniforme

$$\begin{cases} \vec{a}_{O'} = 0 \\ v_{O'} = 0 \\ \vec{\omega} = \text{cost} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' \\ \vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\,' \right) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' \end{cases}$$



Effetti della non inerzialità della Terra:

Accelerazione centrifuga: contribuisce alla variazione di **g** con la latitudine (quella che chiamiamo «accelerazione di gravità» contiene contributi dovuti alla rotazione terrestre)

Accelerazione di Coriolis: deviazione **verso Est** di un corpo in caduta libera. Deviazione **verso destra** dei proiettili nell'emisfero Nord (nell'emisfero S in verso sinistra)

Rotazione del piano di oscillazione di un pendolo (pendolo di Foucault)

Effetti della non inerzialità della Terra

Forza di Coriolis: circolazione ciclonica intorno ad un minimo di pressione. Emisfero Nord.