Sistemi di punti materiali

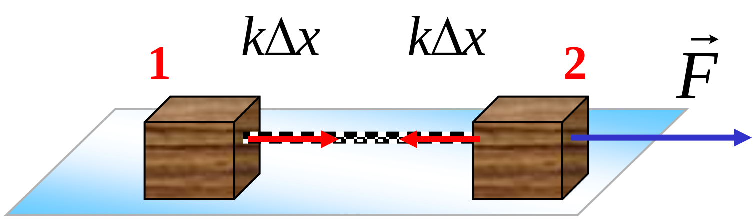
Perché un capitolo dedicato ai sistemi di punti?

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = m_1 \vec{a}_1 \\ \dots \\ \vec{F}_k = m_k \vec{a}_k \end{cases}$$

note le forze agenti su ogni punto
si può calcolare il moto di quel punto
ovvero il moto dell'intero sistema

In genere le equazioni non sono indipendenti: $F_1 = F_1(r_1, r_2, .. r_N)$ ecc.

Esempio :



piano liscio

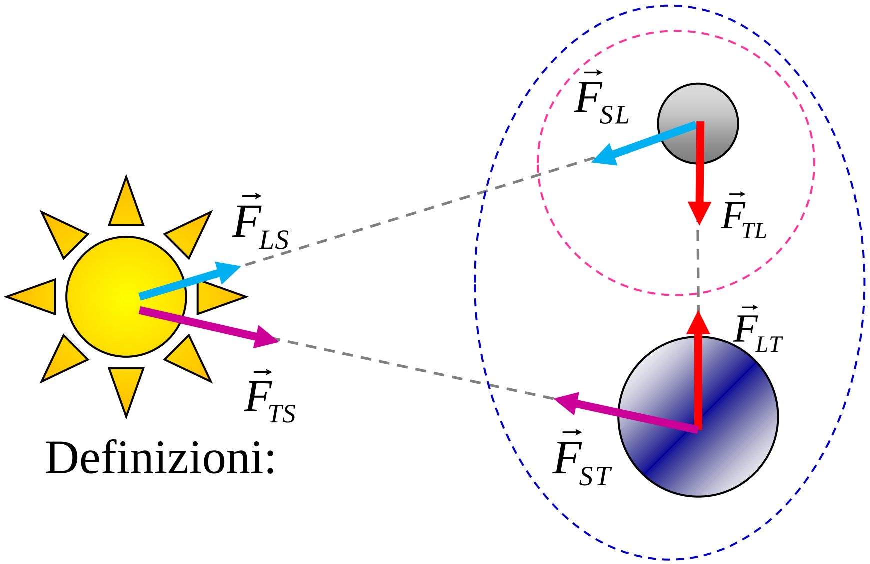
$$\begin{cases} m_1 a_1 = k(x_2 - x_1 - \ell) \\ m_2 a_2 = F - k\underbrace{(x_2 - x_1 - \ell)}_{} \end{cases}$$

Δx allungamento della molla

Per 3 corpi, con forze gravitazionali, il problema è analiticamente impossibile!

Si cerca qualche proprietà globale del sistema

Che cos'è un sistema di punti materiali?



Definizioni:

posso considerare il sistema Luna
oppure il sistema Terra + Luna,
o il sistema Terra + Luna + Sole ...

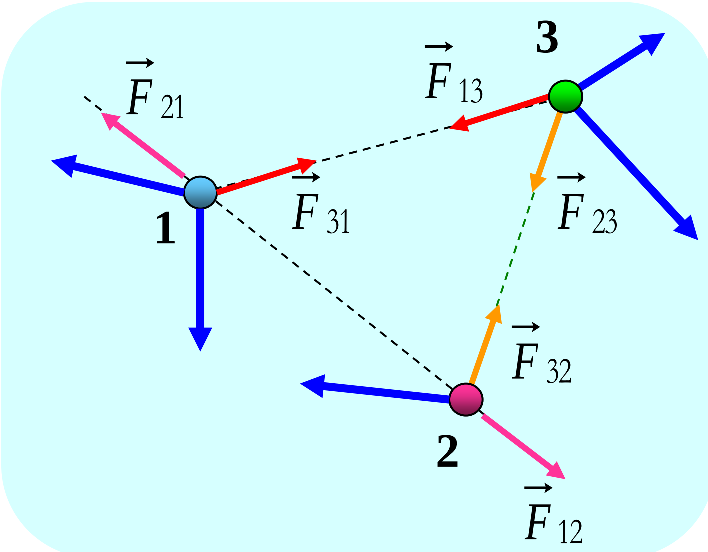
Definito il «Sistema» distingueremo fra

Forze interne: interazione fra elementi del sistema
Forze esterne: interazione di elementi del sistema con elementi non appartenenti al sistema.

se il sistema è la sola Luna, F_{SL} e F_{TL} sono forze esterne (non ci sono forze interne)
se il sistema è Terra + Luna, F_{SL} e F_{ST} sono forze esterne, F_{TL} e F_{LT} sono interne
se il sistema è Sole + Terra + Luna, tutte le forze nel disegno sono interne

Osservazione: la somma delle forze interne è nulla

Forze interne ed esterne ad un sistema

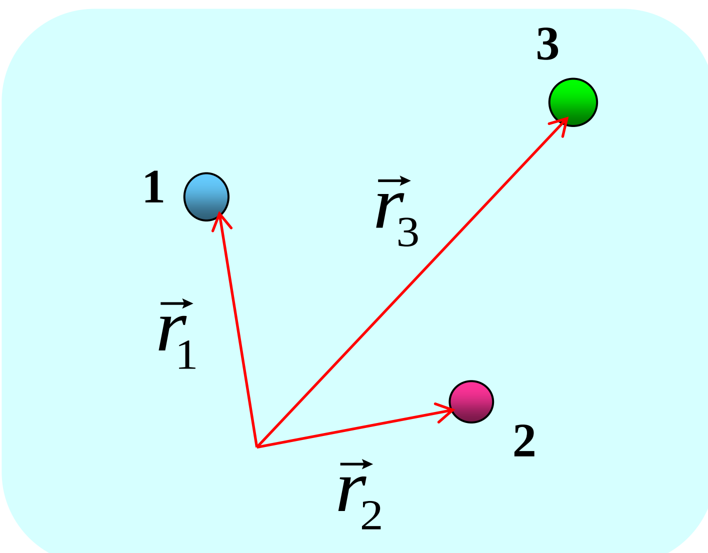


Per la 3ª legge della dinamica ...

$$\vec{R}^{(I)} = \sum_{\substack{j,k \\ j \neq k}} \vec{F}_{jk} = \sum_{(k,j)} \left(\vec{F}_{jk} + \vec{F}_{kj} \right) = 0$$

somma sulle coppie

... la risultante delle forze interne è nulla.



Dato un sistema di punti materiali m_1, m_2, ... m_N, nelle posizioni $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, ... $\mathbf{r}_N$, si definisce

Centro di massa (o baricentro):

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_k m_k \vec{r}_k}{\sum_k m_k} = \frac{\sum_k m_k \vec{r}_k}{m_{TOT}}$$

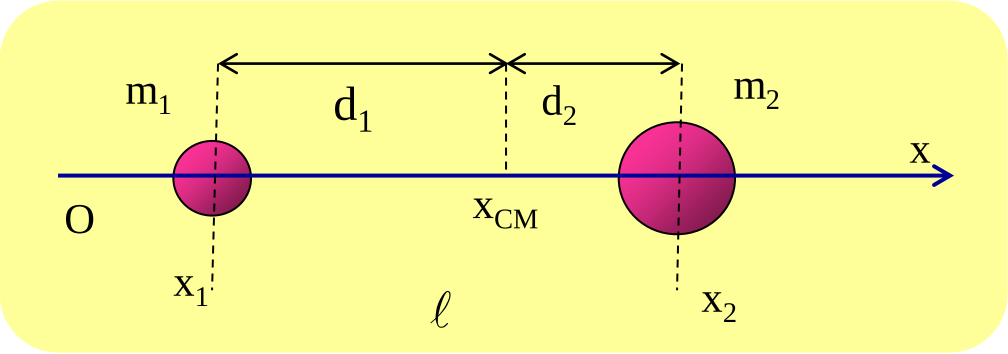
Centro di massa

Per le singole componenti:

$$x_{cm} = \frac{\sum_k m_k x_k}{m_{TOT}} \qquad y_{cm} = \frac{\sum_k m_k y_k}{m_{TOT}} \qquad z_{cm} = \frac{\sum_k m_k z_k}{m_{TOT}}$$

Punto matematico con proprietà notevoli.

Esempio: due punti materiali, a distanza ℓ.



posto per semplicità $x_1=0$

$$x_{cm} = \frac{m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 \ell}{m_1 + m_2}$$

$$d_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\ell \qquad d_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\ell$$

Centro di massa - velocità

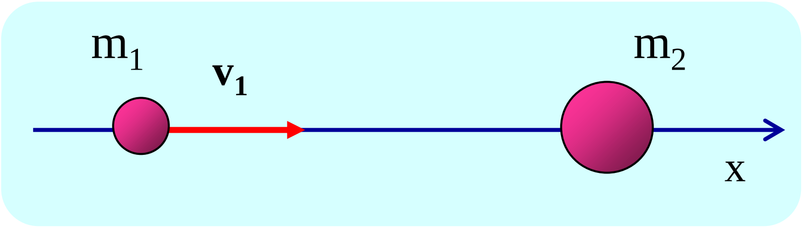
Velocità del centro di massa:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{\sum_k m_k \vec{v}_k}{\sum_k m_k} = \frac{\vec{p}_{TOT}}{m_{TOT}}$$

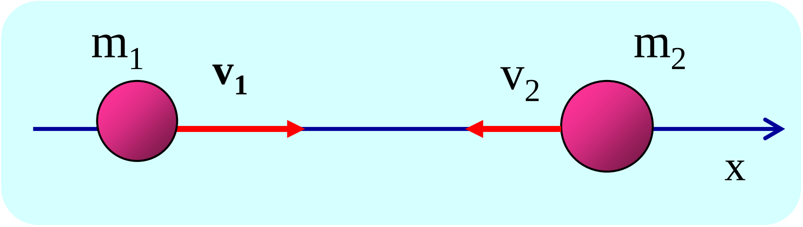
Quantità di moto del sistema

$$\vec{p}_{TOT} = \sum_k m_k \vec{v}_k = m_{TOT} \vec{v}_{cm}$$

$$\vec{p}_{TOT} = m_{TOT} \vec{v}_{cm}$$



Esempio. $v_{cm} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$



Esempio. Sia $m_2=3m_1$ e $v_1 = -3v_2$ $v_{cm} = 0$

la quantità di moto totale può essere nulla senza che il sistema sia in quiete.

Centro di massa - accelerazione

Accelerazione del centro di massa:

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{\sum_k m_k \vec{a}_k}{\sum_k m_k} = \frac{\sum_k m_k \vec{a}_k}{m_{TOT}}$$

$$m_{TOT}\,\vec{a}_{cm} = \sum_k \overbrace{m_k \vec{a}_k}^{\vec{F}_{k,TOT}} = \sum_k \left(\underbrace{\vec{F}_k^{(I)} + \vec{F}_k^{(E)}} \right) = \vec{R}^{(I)} + \vec{R}^{(E)} = \vec{R}^{(E)}$$

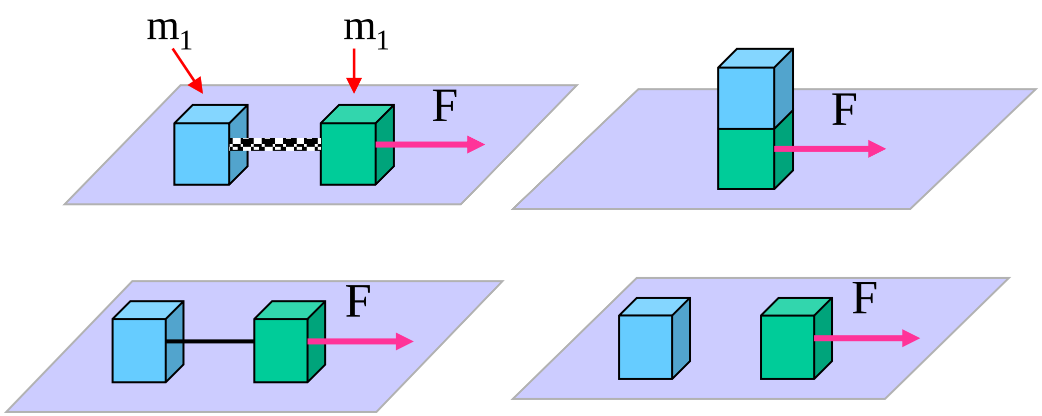
$$\boxed{m_{TOT}\,\vec{a}_{CM} = \vec{R}^{(E)}}$$

Teorema del moto del centro di massa

Il c.d.m. si muove come un punto materiale di massa m_{TOT}, soggetto ad una forza pari alla risultante delle forze esterne.

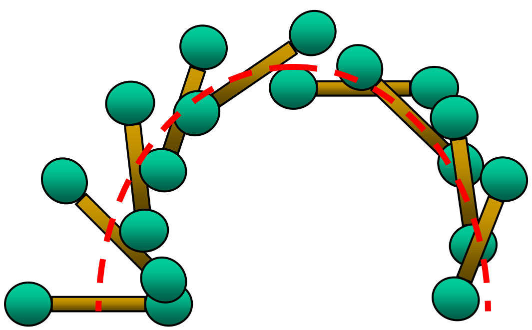
La 2ª legge di Newton, applicata finora ad oggetti puntiformi, si può estendere a qualsiasi sistema, a patto di considerare il moto del suo centro di massa.

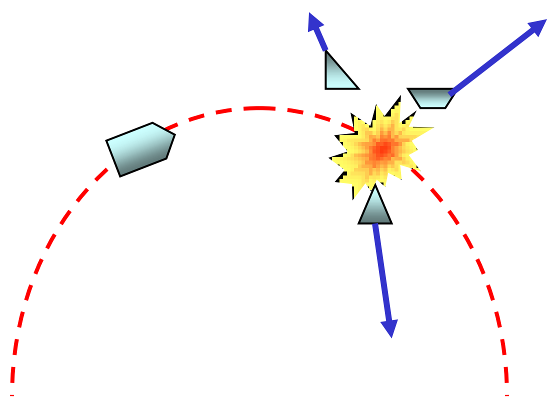
Moto del centro di massa



Nei 4 casi cambiano le forze interne, ma non cambia la forza esterna: l'accelerazione del cdm è la stessa:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\vec{F}}{m_1 + m_2}$$





Moto del cdm di un sistema soggetto solo alla forza peso.

$$\vec{R}^{(E)} = m_{TOT}\vec{g}$$

$$\vec{a}_{cm} = \vec{g}$$

Teorema della quantità di moto

$$m_{TOT}\vec{a}_{CM} = m_{TOT}\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m_{TOT}\vec{v}_{CM}\right) = \frac{d\vec{p}_{TOT}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{p}_{TOT}}{dt} = \vec{R}^{(E)}$$

Teorema della quantità di moto

è solo un modo di scrivere il teorema del Cdm

$$\Delta\vec{p}_{tot} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \vec{J}^{(E)}$$

in forma integrale:
Teorema dell'impulso per un sistema di punti

Sistemi isolati

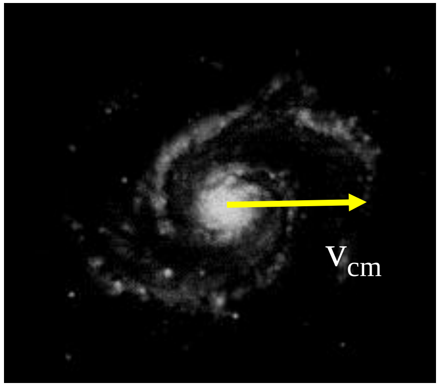
$$m_{TOT}\vec{a}_{CM} = \vec{R}^{(E)}$$

Nullo in un sistema isolato

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_{CM} = 0$$ ovvero $$\boxed{\vec{v}_{CM} = \text{cost}}$$ moto uniforme del c.d.m.

$$\frac{d\vec{p}_{TOT}}{dt} = \vec{R}^{(E)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{p}_{TOT} = \text{cost}}$$

conservazione della quantità di moto

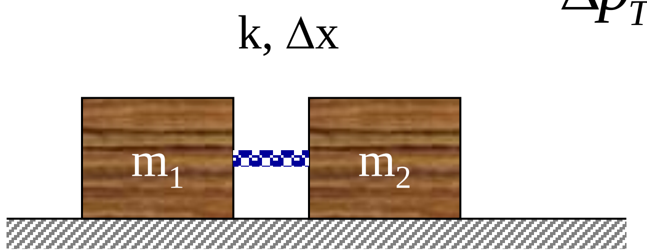


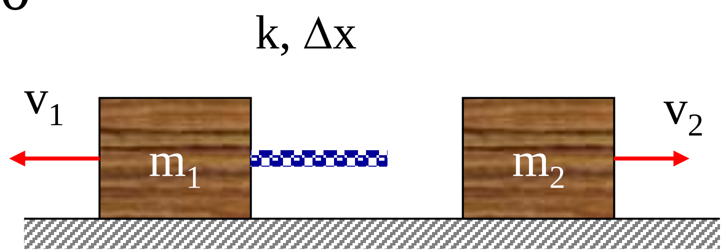
Se la galassia è isolata, la velocità del suo centro di massa è costante.

Senza attrito il cane non potrà modificare la sua velocità (la velocità del suo c.d.m.) per quanto si agiti.

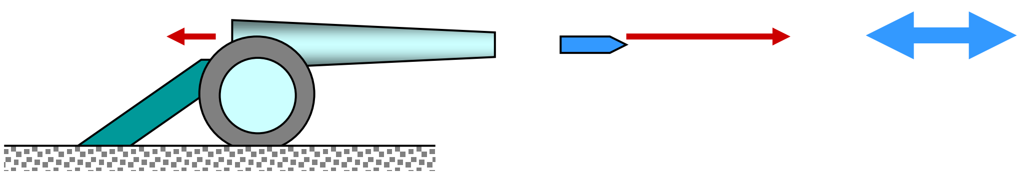
Sistemi isolati. Conservazione della quantità di moto.

$$\Delta \vec{p}_{TOT} = 0$$





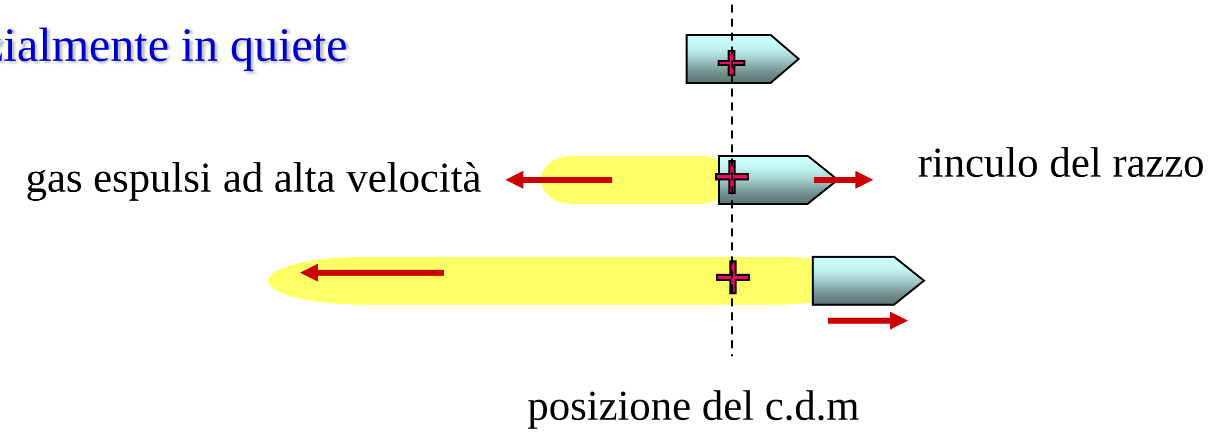
Rinculo di un cannone.



$$m_C \vec{v}_C + m_P \vec{v}_P = 0$$

$$\vec{v}_C = -\frac{m_P}{m_C} \vec{v}_P$$

Razzo isolato, inizialmente in quiete



Sistema isolato. Conservazione della quantità di moto

$$\frac{d\vec{p}_{TOT}}{dt} = \vec{R}^{(E)}$$

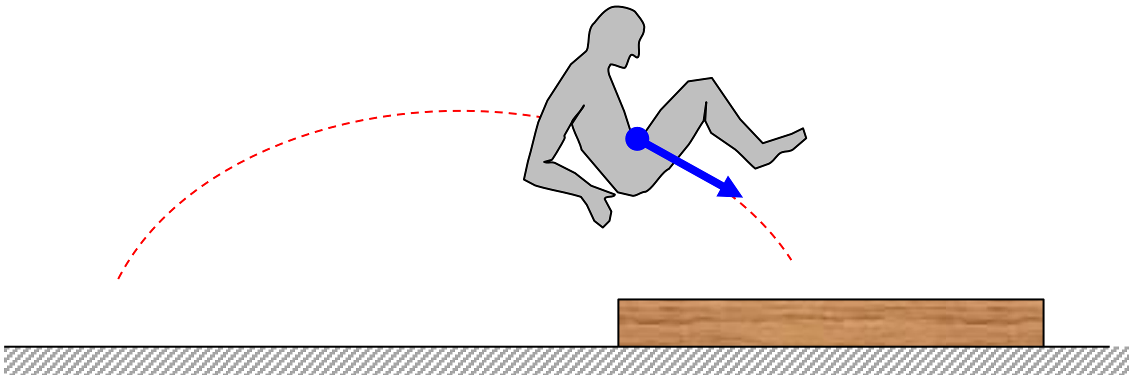
è una relazione vettoriale, quindi:

$$\frac{dp_{TOT,X}}{dt} = R_X^{(E)}$$

$$\frac{dp_{TOT,Y}}{dt} = R_Y^{(E)}$$

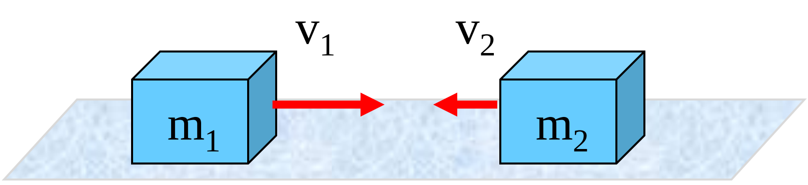
$$\frac{dp_{TOT,Z}}{dt} = R_Z^{(E)}$$

se $R_X=0$ p_x è costante, ecc.



in assenza di attrito, si conserva la componente orizzontale della q.d.m.

Urto fra due punti materiali - Sistema isolato



Sistema isolato: la quantità di moto si conserva

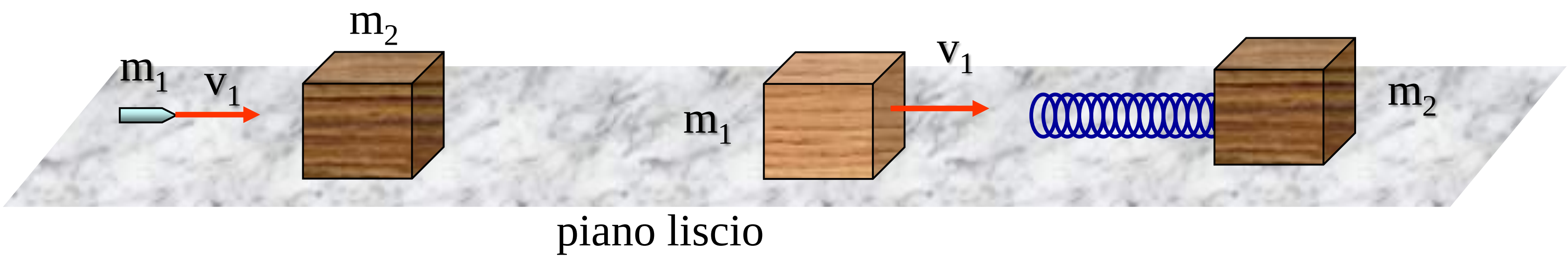
$$\vec{p}_f = \vec{p}_i$$

L'energia meccanica non sempre si conserva nell'urto.

Un urto si dice

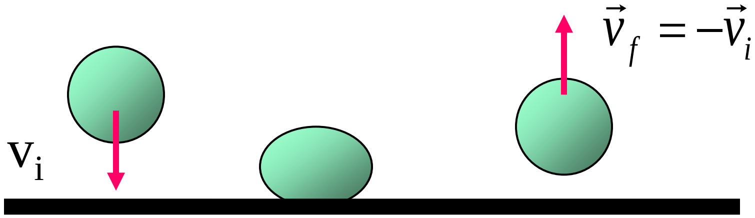
- elastico: se si conserva l'energia cinetica $E_{Kf} = E_{Ki}$
- anelastico o inelastico se ciò non avviene. In particolare:
- totalmente anelastico se i due corpi procedono uniti dopo l'urto

nell'urto totalmente anelastico si ha la massima dissipazione possibile di energia meccanica



Urti - Forze impulsive

Forze impulsive. Esempio di urto elastico



subito prima | durante $\Delta t \sim 0.01$s | subito dopo

Se m=0.1 kg, $v_i = v_f = 10$m/s e $\Delta t = 10$ms
Nello stesso Δt ha agito anche mg=0.98N.

$$\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v} \Rightarrow \Delta p = 2Ns$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{J}_{IMP} + \vec{J}_P$$

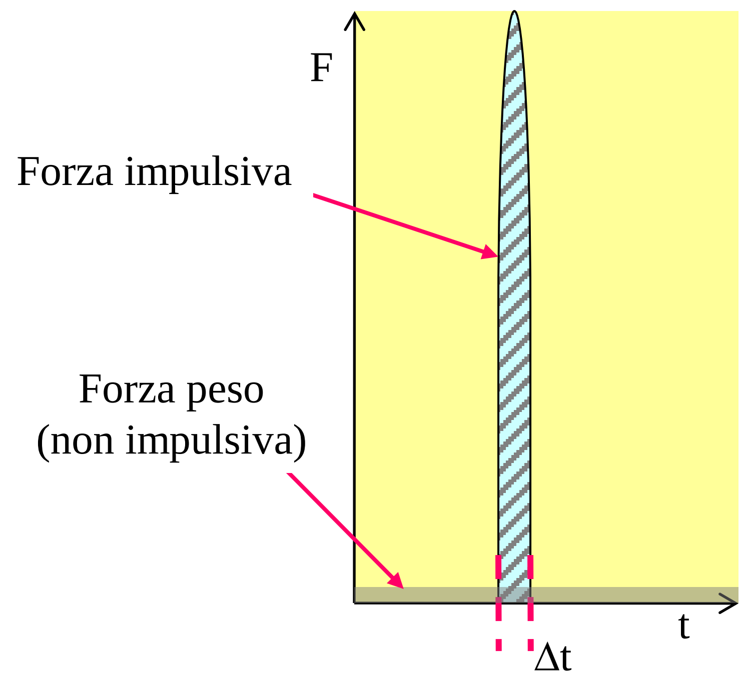
$$\Delta p = J_{IMP} - mg\Delta t \qquad \text{(verso positivo in su)}$$

$\Delta p = 2$ Ns
$mg\Delta t \sim -0.001$ Ns

$$\Delta\vec{p} = \vec{J}_{TOT} \cong \vec{J}_{IMP}$$

Durante l'intervallo Δt

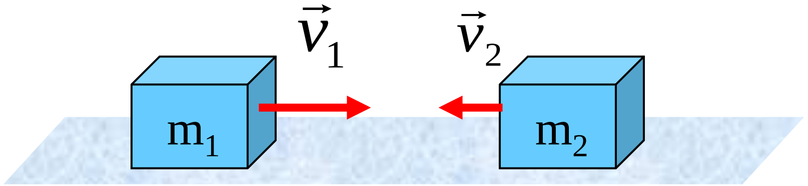
$$\vec{F}_{IMP} + \vec{F}_G \cong \vec{F}_{IMP}$$



Approssimazione impulsiva

- la collisione dura per un tempo «infinitesimo»
- (⇨ lo spostamento durante l'urto è trascurabile)
- nel quale si sviluppano forze «enormi»
- per cui l'impulso J resta finito

Urti fra punti materiali. Approssimazione impulsiva



piano orizzontale scabro: $\vec{R}^{(E)} \neq 0$

A rigore la quantità di moto non si conserva:

$$\Delta\vec{p} = \int_{t}^{t+\Delta t} \vec{R}^{(E)} dt = \vec{J}^{(E)}$$

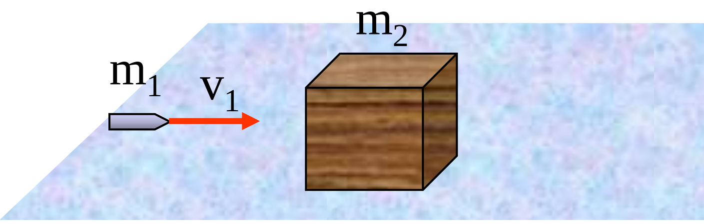
Ma in un urto impulsivo e solo per la breve durata dell'impatto $\vec{J}^{(E)} \cong 0$ $\quad \vec{p}_f \cong \vec{p}_i$

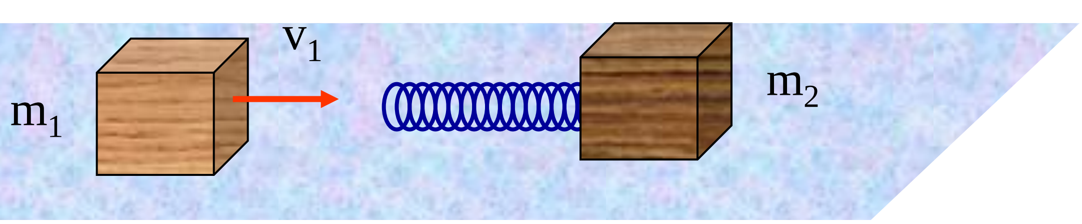
prima e dopo l'urto le forze esterne contribuiscono ma, nell'intervallo Δt della collisione, si possono trascurare.

Per l'energia vale il discorso precedente. Se l'urto è elastico (forze interne conservative) l'energia cinetica si conserva.

approssimazione impulsiva? **SI**

approssimazione impulsiva? **NO**



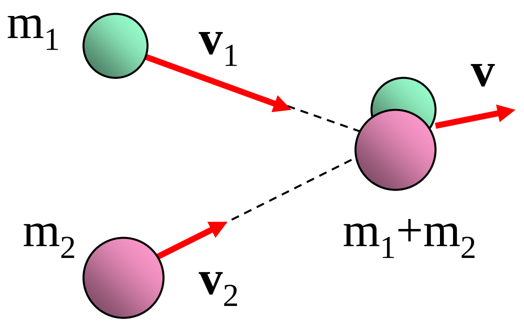


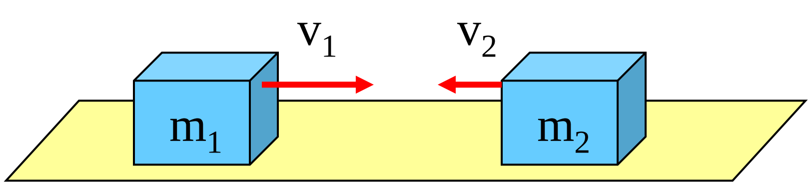
Urto totalmente anelastico

Definizione: l'urto di dice totalmente anelastico se i 2 corpi restano attaccati dopo l'urto
In questo caso si ha la massima dissipazione di energia cinetica (v. Teorema di König)

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\,\vec{v}_f \Rightarrow \vec{v}_f = \vec{v}_{CM}$$

nota: conservazione della quantità di moto significa v_{CM} costante





Urto elastico

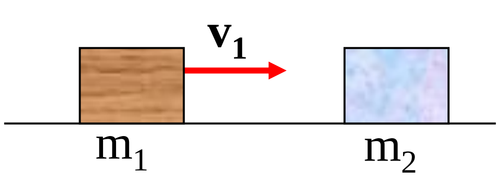
- Conservazione della quantità di moto — se sistema isolato o urto impulsivo
- Conservazione dell'energia meccanica (cinetica) — se l'urto è elastico

Caso di urto frontale (1D).

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ \dfrac{m_1}{2} v_1^2 + \dfrac{m_2}{2} v_2^2 = \dfrac{m_1}{2} v_1'^2 + \dfrac{m_2}{2} v_2'^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1' = \dfrac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2} \\ v_2' = \dfrac{(m_2 - m_1) v_2 + 2 m_1 v_1}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

Caso particolare: "bersaglio inizialmente fermo".

«prima»

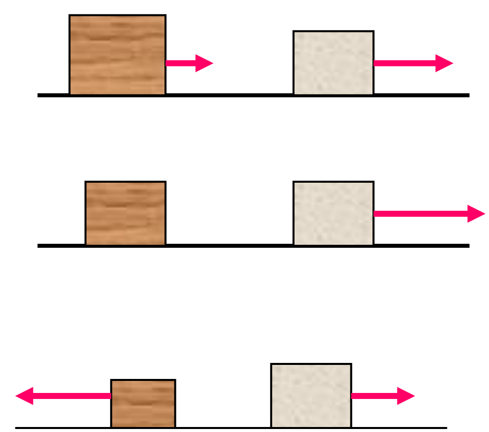


m_2 inizialmente ferma.

$$v_1' = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_1$$

$$v_2' = \left(\frac{2 m_1}{m_1 + m_2}\right) v_1$$

«dopo»



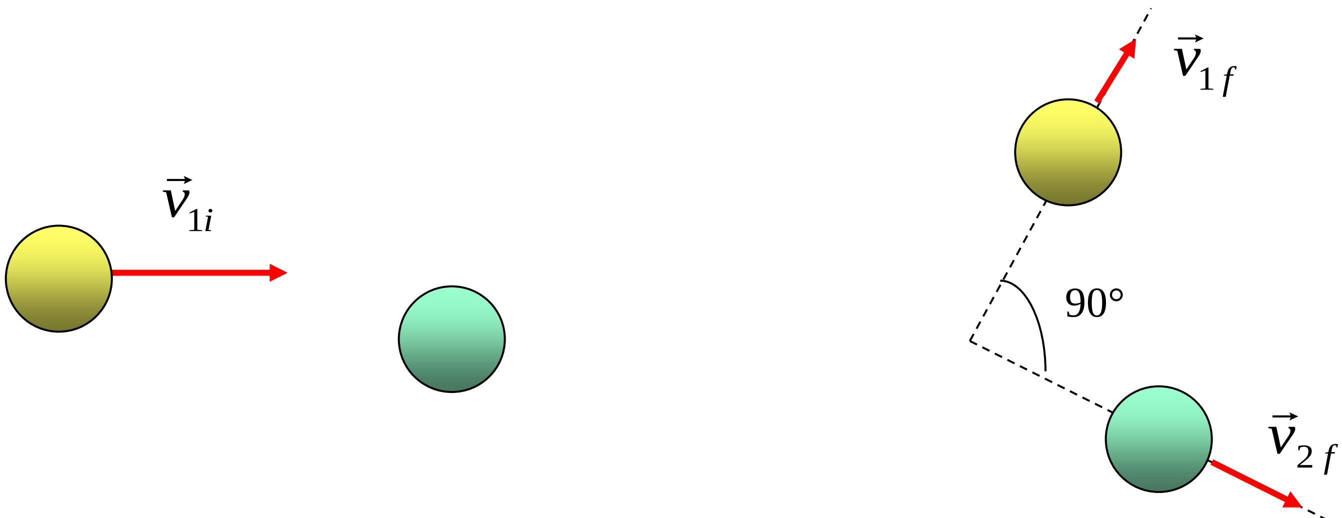
$m_1 > m_2$

$m_1 = m_2$

$m_1 < m_2$

Urto elastico in un piano. Un caso interessante

Caso particolare: due corpi di uguale massa con bersaglio inizialmente fermo



le direzioni di m_1 e m_2 dopo l'urto formano un angolo di 90°

$$\begin{cases} m\vec{v}_{1i} = m\vec{v}_{1f} + m\vec{v}_{2f} \\ \dfrac{m}{2}v_{1f}^2 + \dfrac{m}{2}v_{2f}^2 = \dfrac{m}{2}v_{1i}^2 \end{cases}$$

$$v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2\vec{v}_{1f} \cdot \vec{v}_{2f} = v_{1f}^2 + v_{2f}^2$$

C.V.D.