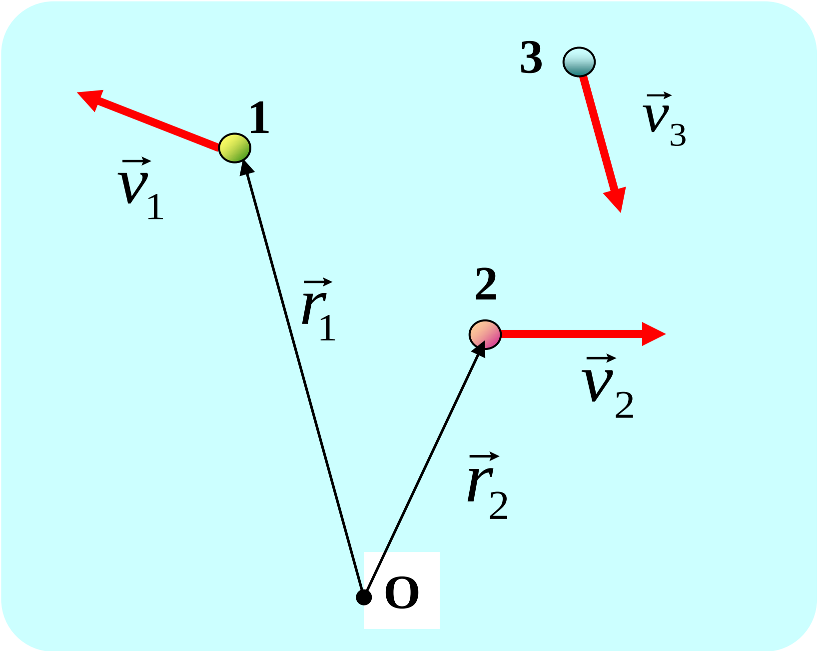
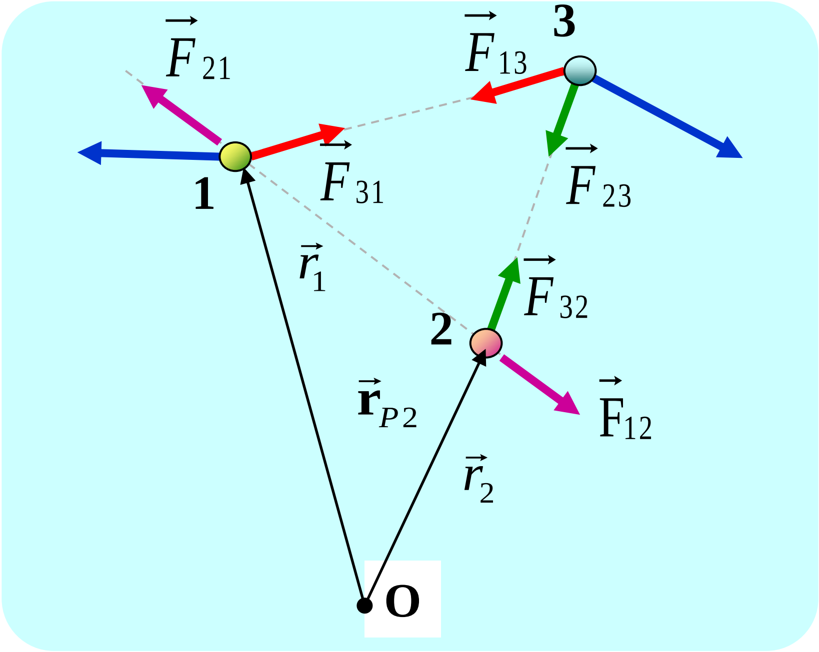
Momenti di un sistema di punti.

Momento angolare rispetto al polo O

$$\vec{L} = \sum_k \vec{L}_k = \sum_k \left(\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k\right)$$





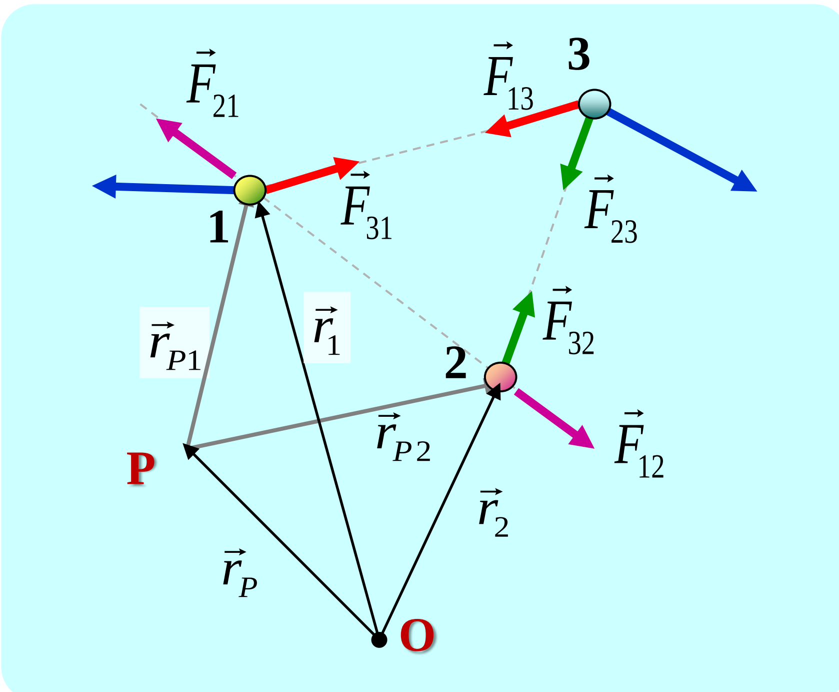
forza totale agente su m_k , include forze interne ed esterne

Momento delle forze

$$\vec{M} = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{F}_k$$

generalizzare il teorema del momento angolare ad un sistema qualsiasi e ad un polo qualsiasi (anche mobile)

Teorema del momento angolare



Momento angolare **totale rispetto al polo P** che può essere **mobile**.

$$\vec{L}_P = \sum_k \left(\vec{r}_{Pk} \times m_k \vec{v}_k \right)$$

$$\vec{r}_{Pk} = \vec{r}_k - \vec{r}_P \qquad \vec{r}_P = \overrightarrow{OP}$$

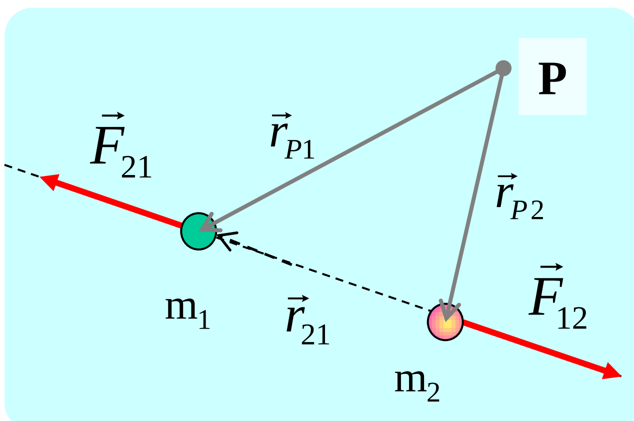
$$\frac{d\vec{L}_P}{dt} = \sum_k \left(\frac{d\vec{r}_{Pk}}{dt} \times m_k \vec{v}_k + \vec{r}_{Pk} \times \underbrace{m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt}} \right)$$

$$\frac{d\vec{L}_P}{dt} = \sum_k \left[\overbrace{\left(\vec{v}_k - \vec{v}_P \right)} \times m_k \vec{v}_k + \vec{r}_{Pk} \times \overbrace{\left(\vec{F}_k^{(E)} + \vec{F}_k^{(I)} \right)} \right]$$

Teorema del momento angolare

$$\frac{d\vec{L}_P}{dt} = \cancel{\sum_k \vec{v}_k \times m_k \vec{v}_k} - \underbrace{\sum_k \vec{v}_P \times m_k \vec{v}_k}_{-\vec{v}_P \times \underbrace{\sum_k m_k \vec{v}_k}_{\vec{p}_{TOT} = m_{TOT}\vec{v}_{CM}}} + \underbrace{\sum_k \vec{r}_{Pk} \times \vec{F}_k^{(E)}}_{\vec{M}_P^{(E)}} + \underbrace{\sum_k \vec{r}_{Pk} \times \vec{F}_k^{(I)}}_{\vec{M}_P^{(I)}}$$

Cons. 2 punti:



Momento delle forze interne:

$$\vec{r}_{P1} \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_{P2} \times \vec{F}_{12} = \left(\vec{r}_{P1} - \vec{r}_{P2}\right) \times \vec{F}_{21} = \vec{r}_{21} \times \vec{F}_{21} = 0$$

Per il 3° principio della dinamica. Se si ammette che le forze siano dirette lungo la congiungente.

$$\vec{M}^{(I)} = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{(I)} = \sum_k \vec{r}_k \times \sum_j \vec{F}_{jk} = \sum_{(k,j)} \left(\vec{r}_k - \vec{r}_j\right) \times \vec{F}_{jk} = \sum_{(k,j)} \vec{r}_{kj} \times \vec{F}_{jk} = 0$$

Teorema del momento angolare

$$\frac{d\vec{L}_P}{dt} = \vec{M}^{(E)} - \vec{v}_P \times m_{TOT}\vec{v}_{CM}$$

Nota: le quantità sono misurate nel sistema inerziale, anche se i momenti sono calcolati rispetto al polo P che può essere mobile.

il prodotto vettore è nullo se:

$\vec{v}_P = 0$ il polo P è fisso, oppure

$v_{CM} = 0$ il centro di massa è fisso, oppure

$\vec{v}_P \,//\, \vec{v}_{CM}$ la velocità di P è parallela a quella del c.d.m.

(se P coincide con il c.d.m. $\vec{v}_P = \vec{v}_{CM}$)

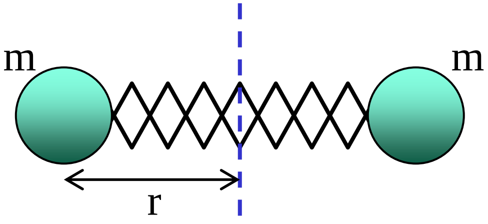
Se l'ultimo termine è nullo $$\frac{d\vec{L}_P}{dt} = \vec{M}^{(E)}$$ come per un punto materiale con polo fisso

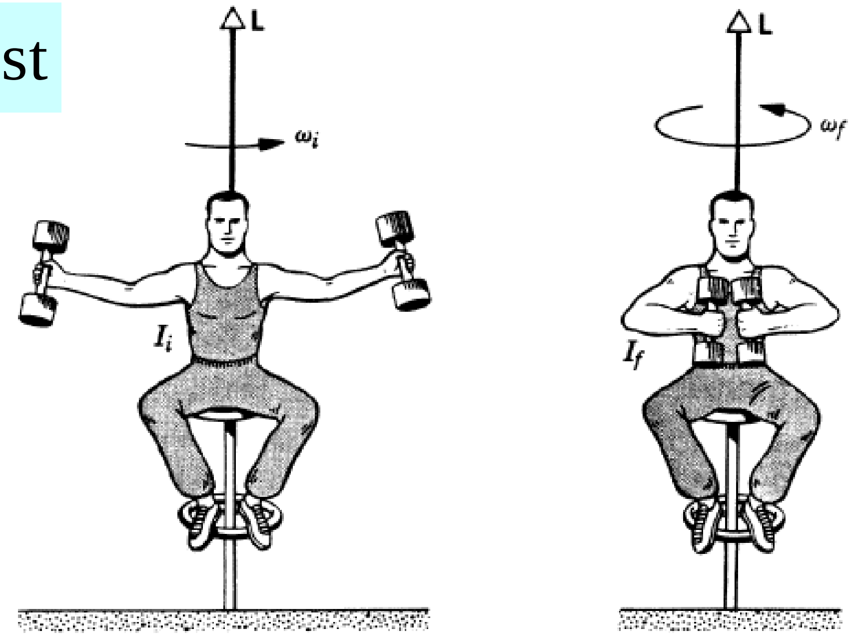
aver supposto il polo mobile ha prodotto un risultato molto importante:

il teorema vale nella sua forma più semplice anche se P coincide con il c.d.m.

Conservazione del momento angolare

Se $\boxed{\vec{M}^{(E)} = 0}$ allora $\boxed{\vec{L}_{TOT} = \text{cost}}$





Come cambia ω se r raddoppia?

E' utile distinguere 2 casi:

Non agiscono forze esterne

$\vec{M}^{(E)} = 0$ rispetto a qualsiasi polo.

$\vec{L} = \text{cost}$ rispetto a qualsiasi polo

Le forze esterne sono diverse da zero.

tuttavia

esiste un punto P tale che $\vec{M}_P^{(E)} = 0$

Sistema di riferimento del c.d.m.

Sistema di riferimento
- la cui origine (O') coincide con il c.d.m.
- che compie solo un moto di traslazione.

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_{CM} \\ \vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_{CM} \\ \vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_{CM} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \vec{r}\,'_{CM} = 0 \\ \vec{v}\,'_{CM} = 0 \\ \vec{a}\,'_{CM} = 0 \end{cases}}$$

In generale è un sistema non inerziale: $\vec{F}_i' = \vec{F}_i - m_i \vec{a}_{CM}$

Caratteristiche:

$\vec{R}'^{(E)} = 0$ $\qquad \vec{R}'^{(E)} = \sum_i \vec{F}_i' = \vec{R}^{(E)} - m_{TOT}\vec{a}_{CM} = 0$

la risultante delle forze esterne
incluse le forze inerzali
nel sistema del cdm è nulla

$\vec{p}\,'_{TOT} = 0$ $\qquad \vec{p}\,'_{TOT} = \sum_i m_i \vec{v}\,'_i = m_{TOT}\vec{v}\,'_{CM} = 0$

nel sistema del cdm la quantità
di moto è identicamente nulla

Se i momenti si calcolano rispetto al cdm

$\vec{M}' = \vec{M}'^{(E)}$ le forze apparenti non modificano il momento delle forze esterne.

$$\vec{M}'^{(E)} = \frac{d\vec{L}'}{dt}$$

il teorema del momento angolare vale anche nel sistema del c.d.m.

Teorema di König del momento angolare

Relazione fra il momento angolare misurato rispetto ad un polo fisso O e rispetto al centro di massa.

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i (\vec{r}_i' + \vec{r}_{CM}) \times m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM})$$

$$\vec{L} = \underbrace{\sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'}_{\vec{L}'} + \underbrace{\sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_i'}_{\vec{r}_{CM} \times \sum_i m_i \vec{v}_i' = \vec{r}_{CM} \times m_{TOT} \cancel{\vec{v}_{CM}'}} + \underbrace{\sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_{CM}}_{\left(\sum_i m_i \vec{r}_i'\right) \times \vec{v}_{CM} = m_{TOT} \cancel{\vec{r}_{CM}'} \times \vec{v}_{CM}} + \sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_{CM}$$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}' + \underbrace{\vec{r}_{CM} \times m_{TOT} \vec{v}_{CM}}_{\text{L del c.d.m.}}}$$

Teorema di König del momento angolare

L **nel** **c.d.m**

L **del** **c.d.m.**

- Rispetto al momento angolare, il moto del cdm non riassume le proprietà del sistema, a differenza di $\mathbf{P}_{TOT}$. Non basta conoscere il moto del cdm per conoscere **L**.
- in particolare, anche se v_{CM}=0 il momento angolare può essere diverso da zero.

Teorema di König dell'energia cinetica.

$$E_K = \sum_i \frac{m_i}{2} v_i^2 = \sum_i \frac{m_i}{2} \left(\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM}\right) \cdot \left(\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM}\right)$$

$$E_K = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i v_i'^2 + 2 \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_i' \cdot v_{CM}} + \sum_i m_i v_{CM}^2 \right)$$

$$\left(\sum_i m_i \vec{v}_i' \right) \cdot \vec{v}_{CM} = m_{TOT} \cancel{\vec{v}_{CM}'} \cdot \vec{v}_{CM} = 0$$

$$\boxed{E_K = \underbrace{E_K'}_{E_K \text{ nel cdm}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_{TOT} v_{CM}^2}_{E_K \text{ del cdm}}}$$

l' Energia Cinetica non dipende solo dal moto del centro di massa, a differenza di $\mathbf{P}_{TOT}$. Non basta conoscere il moto del cdm per conoscere E_K.

Anche se $v_{CM}=0$ E_K può non essere nulla.

Però, se $E_K=0$, allora v_{CM} deve essere nulla.

Teorema di König dell'energia cinetica.

$$E_K = E'_K + \frac{1}{2} m_{TOT} v_{CM}^2$$

Applicazione agli urti fra punti materiali.

In un urto si conserva la quantità di moto (se il sistema è isolato o l'urto è impulsivo) ciò significa che il 2° termine a DX è identico prima e dopo l'urto.

Il primo termine $E'_K \geq 0$ può variare e dipende dal tipo di urto:

Nell'urto totalmente anelastico $E'_K = 0$ (massima dissipazione di energia)

Energia cinetica di un sistema di punti materiali.

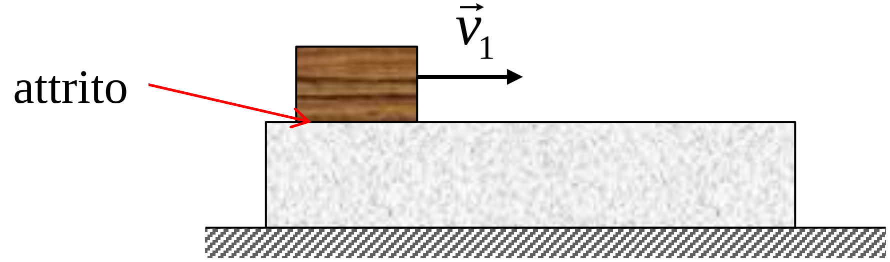
$$E_K = \sum_i E_{Ki}$$

per la massa m_i vale $W_i = \Delta E_{Ki}$ sommando: $\sum_i W_i = \sum_i \Delta E_{Ki}$

$$W_{TOT} = \Delta E_K$$ Teorema dell'energia cinetica

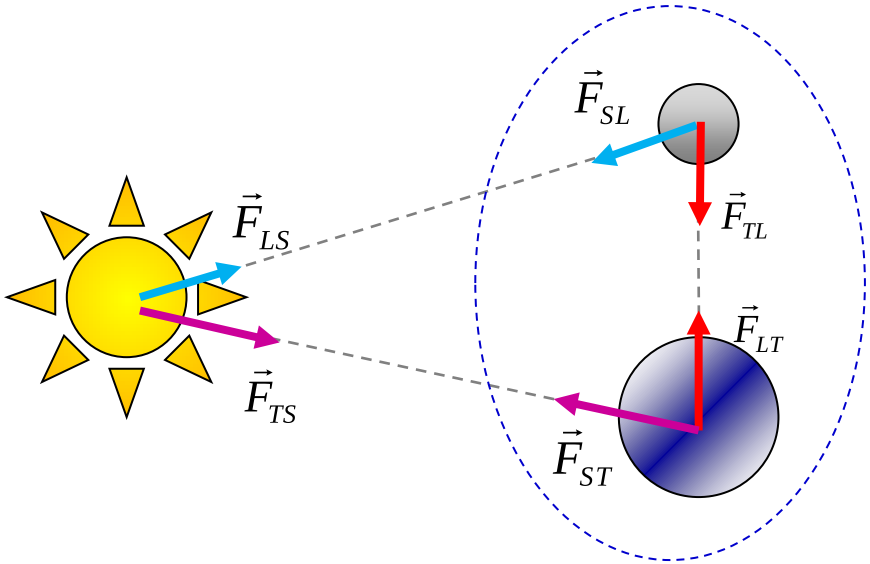
Nota – A differenza della forza risultante e del momento risultante, il lavoro complessivo delle forze interne non è nullo. Quindi non si può dire che in un sistema isolato si conserva l'energia meccanica.

esempio:



piano orizzontale liscio

Energia potenziale di un sistema di punti materiali



l'energia potenziale della Luna è dovuta alla forza gravitazionale del Sole e della Terra

$$E_{PLuna} = E_{PSL} + E_{PTL}$$

Energia potenziale della Terra

$$E_{PTerra} = E_{PST} + E_{PLT}$$

Energia potenziale del sistema Terra + Luna

$$E_{PTerra-Luna} = E_{PST} + E_{PLT} + E_{PSL}$$

questa è anche l'energia potenziale del sistema Sole + Terra + Luna

L'energia potenziale è energia di interazione di una (o più) coppie di corpi

Nel nostro corso non dovrebbe essere un problema.

Energia meccanica in un sistema di punti materiali

Riassumendo, come per un singolo punto materiale:

Teorema dell'energia cinetica $$W_{TOT} = \Delta E_K$$

$$E_M = \mathrm{E}_K + E_P$$

se tutte le forze sono conservative (comprese quelle interne) $$E_M = \text{cost}$$

in presenza di forze non conservative: $$W_{NC} = \Delta E_M$$

con l'avvertenza che

- il lavoro totale non è il lavoro della forza risultante
- (l'energia potenziale non è sempre la somma delle energie potenziali)
- le forze interne contribuiscono al lavoro

Sistemi di forze equivalenti

Due sistemi di forze sono equivalenti se hanno

- stessa risultante $\vec{R}$
- stesso momento risultante $\vec{M}_{TOT}$

Perché sistemi di forze con questa proprietà dovrebbero essere «equivalenti»?

Punto materiale

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} = \vec{R}$$

stessa equazione del moto con sistemi di forze che hanno la **stessa risultante**

Corpo rigido

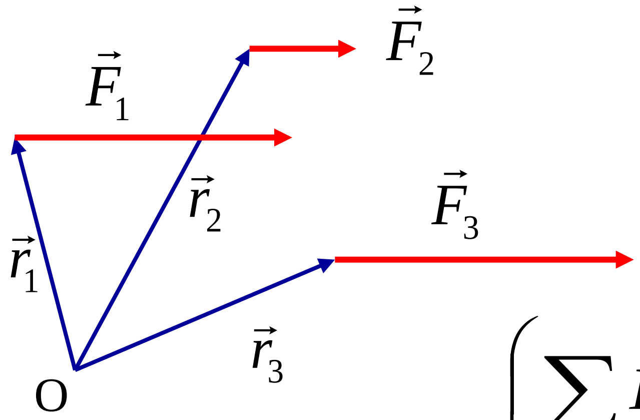
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}_{cm} = \vec{R}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

stesse equazioni del moto per sistemi di forze con la **stessa risultante** e lo **stesso momento risultante** (v. prossimo capitolo)

Sistemi di forze equivalenti

Esempio importante: Forze parallele



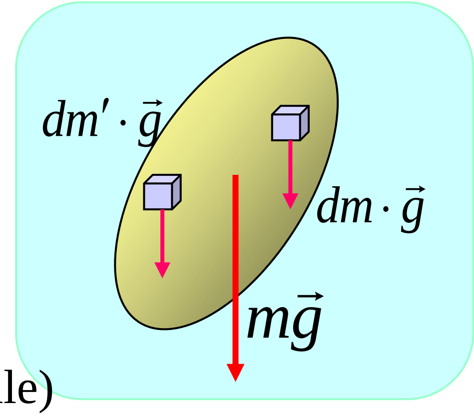
$$\vec{M}_O = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times F_i \vec{u} =$$

$$\left(\sum_i F_i \vec{r}_i \right) \times \vec{u} = \frac{\sum_i F_i \vec{r}_i}{\left(\sum_i F_i \right)} \times \underbrace{\left(\sum_i F_i \right)}_{R} \vec{u} = \vec{r}_F \times \vec{R}$$

$$\vec{r}_F = \frac{\sum_i F_i \vec{r}_i}{\sum_i F_i}$$

è il centro di forza.

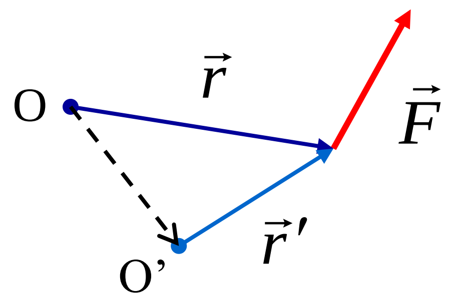
se le F_i sono forze peso: $F_i = m_i g$ e $\vec{r}_F = \vec{r}_{cm}$



In questo caso il sistema di forze si può ridurre ad un'unica forza applicata in un punto opportuno: il centro di forza (non vero in generale)

Proprietà del momento di un sistema di forze

Il momento risultante di un sistema di forze non dipende dal polo se la risultante è nulla



$$\vec{M}_o = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \left(\overrightarrow{OO'} + \vec{r}_i{}'\right) \times \vec{F}_i$$

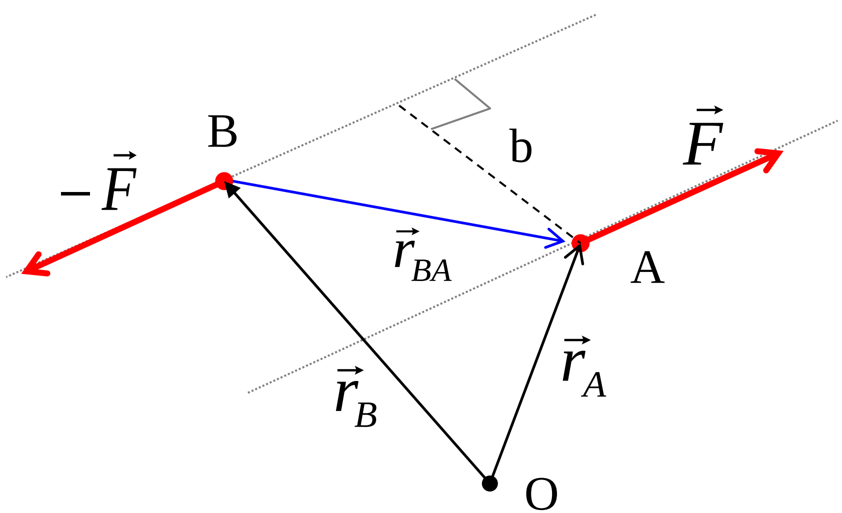
$$\vec{M}_o = \vec{M}_{o'} + \overrightarrow{OO'} \times \sum_i \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_o = \vec{M}_{o'} + \overrightarrow{OO'} \times \cancel{\vec{R}}$$

se la risultante è nulla

$$\vec{M}_o = \vec{M}_{o'}$$

Coppia di forze: insieme di due forze opposte, aventi diversa retta d'azione



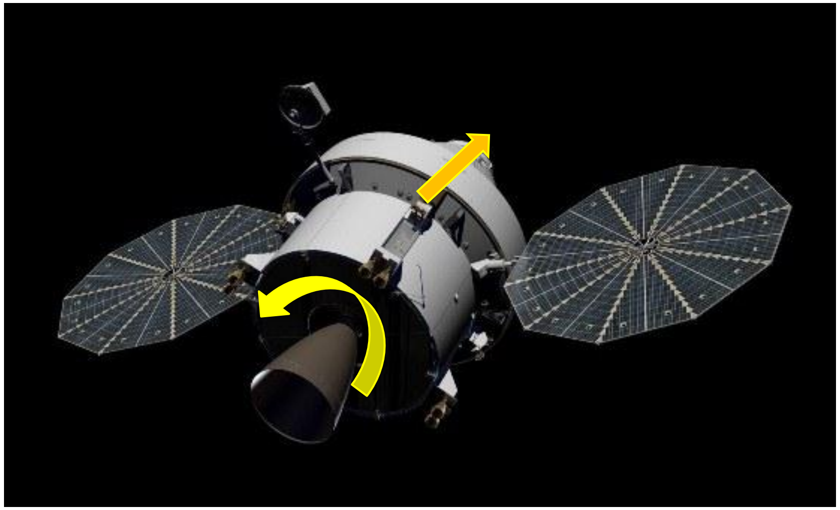
$$\vec{M} = \vec{r}_A \times \vec{F} - \vec{r}_B \times \vec{F}$$

$$\vec{M} = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}$$

$$M = bF$$

Questo semplice sistema non è riducibile ad una singola forza opportunamente applicata.

Sistema di riferimento del c.d.m.



Sistema isolato. Sono costanti:

velocità del cdm (ovvero quantità di moto)

momento angolare rispetto a qualsiasi polo

Sistema non isolato soggetto alla forza peso che si può pensare applicata nel c.d.m.

moto parabolico del c.d.m.

il momento angolare rispetto al c.d.m. è costante