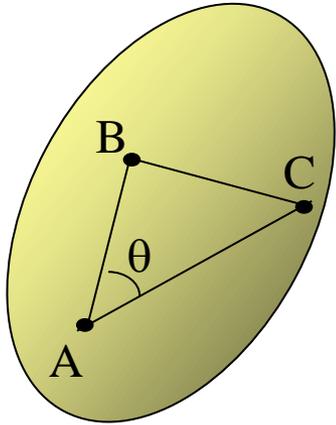


Corpo rigido.

Solido ideale **indeformabile**. Sistema di punti materiali, le cui **posizioni reciproche** rimangono **immutate**. E' un' **approssimazione**, come già il concetto di punto materiale.



$$AB = \text{cost} \quad \hat{A} = \text{cost}$$

$$AC = \text{cost} \Rightarrow \hat{B} = \text{cost}$$

$$BC = \text{cost} \quad \hat{C} = \text{cost}$$

$$|\overline{BC}|^2 = |\overline{AC} - \overline{AB}|^2 =$$

$$AC^2 + AB^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{AB}$$

$$\Rightarrow \theta = \text{cost}$$

distanze e angoli costanti

Le forze interne hanno l'unico compito di garantire la rigidità:
non fanno lavoro e non saranno considerate.

In quanto sistema di punti materiali, valgono per esso le equazioni generali:

Le forze interne non compiono lavoro:

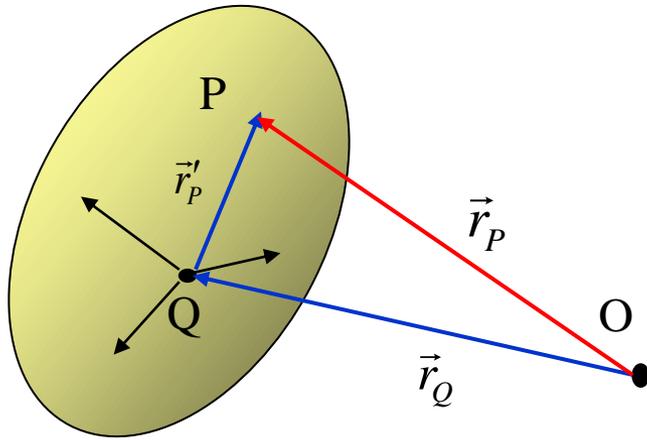
$$\begin{cases} m_{TOT} \vec{a}_{cm} = \vec{R}^{(E)} \\ \frac{d\vec{L}_{TOT}}{dt} = \vec{M}^{(E)} \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} m\vec{a}_{cm} = \vec{R} \\ \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \end{cases}$$

$$W_{TOT} = W_{EXT} = \Delta E_K$$

Corpo rigido. Descrizione del moto



la posizione di un corpo rigido è determinata quando sono fissati 3 punti. Considerando che le distanze fra i punti sono costanti

- 3** parametri per il 1° punto
- 2** parametri per il 2°
- 1** parametro per il 3° punto

Un corpo rigido ha 6 gradi di libertà

per ogni sistema
di punti materiali:

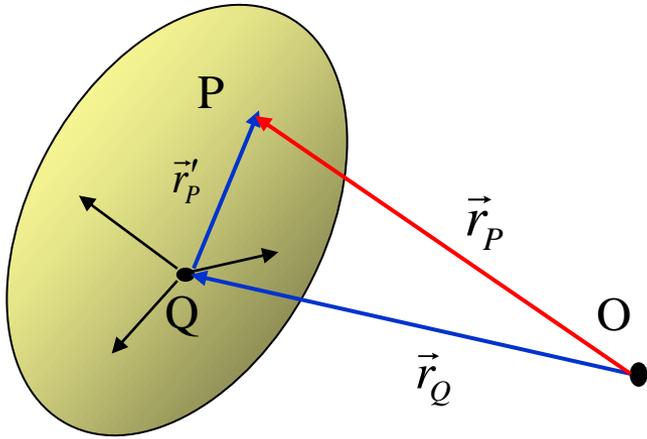
$$\begin{cases} m\vec{a}_{cm} = \vec{R} \\ \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \end{cases}$$

6 equazioni indipendenti ...

Definiscono completamente il moto di un Corpo Rigido

Equazioni del moto del corpo rigido

Corpo rigido. Descrizione del moto



$$\vec{r}_P = \vec{r}_Q + \overrightarrow{QP} \quad \text{con} \quad \overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QP} = \text{cost}$$

P può solo ruotare rispetto a Q

$$\frac{d\overrightarrow{QP}}{dt} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{QP} \quad \text{rotazione di P intorno a Q}$$

$\vec{\omega}$ è la stessa per tutti i punti del corpo rigido

derivando

$$\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \times \overrightarrow{QP}$$

traslazione

rotazione

Il moto più generale di un corpo rigido
è una **rototraslazione**

In generale conviene prendere Q

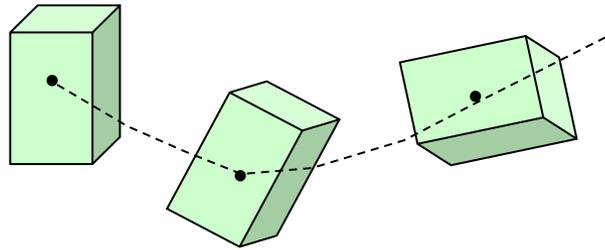
coincidente col c.d.m.

oppure

sull'asse di rotazione, se questo è fisso.

Corpo rigido. Descrizione del moto

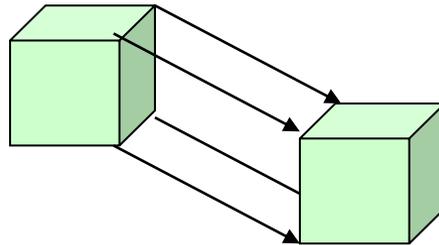
Rototraslazione



Equazioni del moto
di un corpo rigido

$$\begin{cases} m\vec{a}_{cm} = \vec{R} \\ \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \end{cases}$$

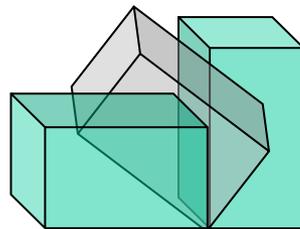
Pura traslazione



tutto si riassume nel moto del cdm

$$\vec{R} = m\vec{a}_{cm}$$

Pura rotazione con asse fisso



La dinamica si riduce a:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

se si calcolano i momenti rispetto
ad un **polo sull'asse di rotazione.**

Corpi continui

I corpi estesi sono spesso considerati **continui**. Ciò va inteso **in senso macroscopico** (volumi “infinitesimi” macroscopicamente, ma grandi dal punto di vista atomico).

E' utile definire la **massa per unità di volume** (**densità volumica** o densità):

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad \text{densità} \quad \dim[\rho] = \frac{kg}{m^3} \quad m = \int_V \rho dV \quad \text{in genere} \quad \rho = \rho(x, y, z)$$

Corpo omogeneo: ρ è uniforme. In tal caso: $m = \rho V$

$$\rho_S = \frac{dm}{dS} \quad \text{densità superficiale:} \quad \dim[\rho_S] = \frac{kg}{m^2}$$

$$\rho_L = \frac{dm}{d\ell} \quad \text{densità lineare:} \quad \dim[\rho_L] = \frac{kg}{m}$$

Centro di massa di un sistema continuo

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{m_{TOT}} \sum_k m_k \vec{r}_k$$

$$\sum m \vec{r} \rightarrow \int \vec{r} dm = \int \rho \vec{r} dV$$

↑
ρdV

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{m} \int \rho \vec{r} dV$$

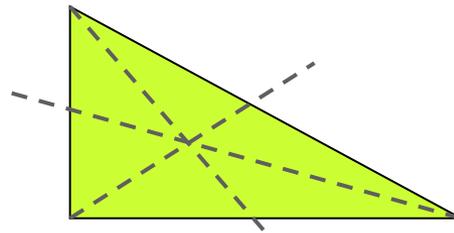
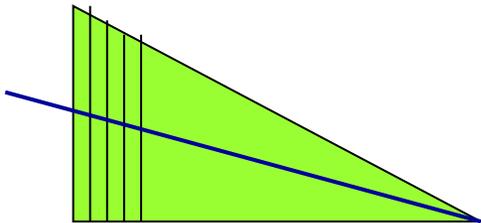
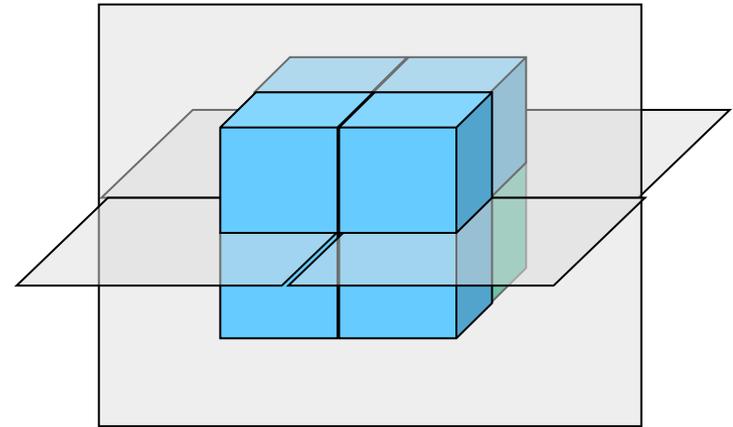
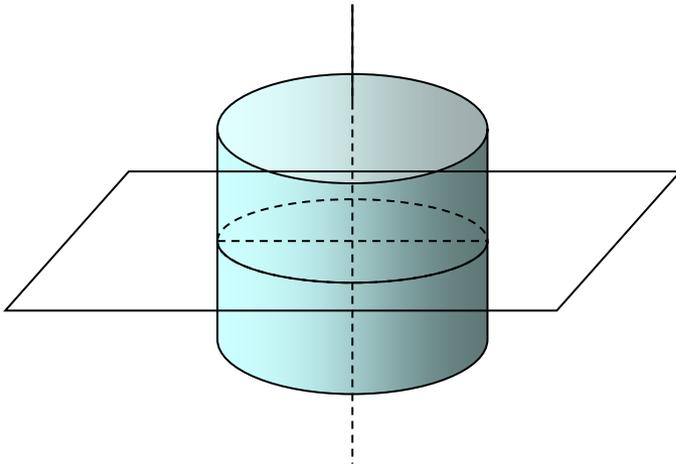
se il corpo è omogeneo:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{V} \int_V \vec{r} dV$$

Centro di massa e simmetria

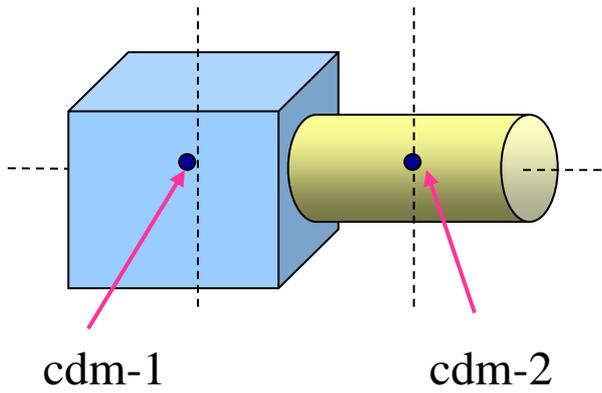
Se il sistema possiede una simmetria, il calcolo di \mathbf{r}_{cm} si semplifica perché esso giace

- nei **punti** di simmetria
- lungo gli **assi** di simmetria
- sui **piani** di simmetria

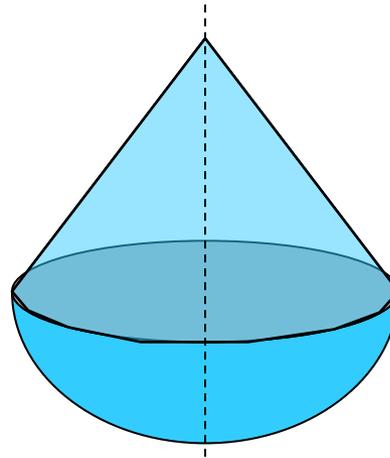
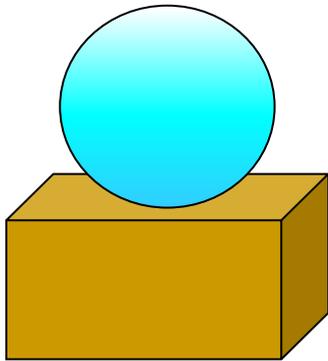


baricentro di un triangolo

Centro di massa di sistemi composti.



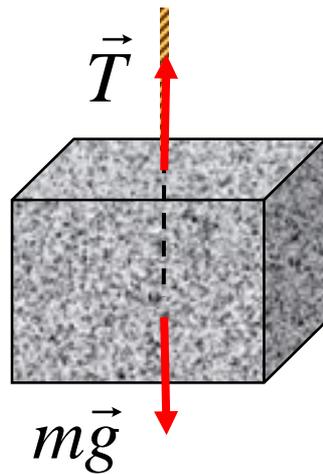
$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_{cm,1} + m_2 \vec{r}_{cm,2}}{m_1 + m_2}$$



dove si trova il baricentro?

Equilibrio di un corpo rigido.

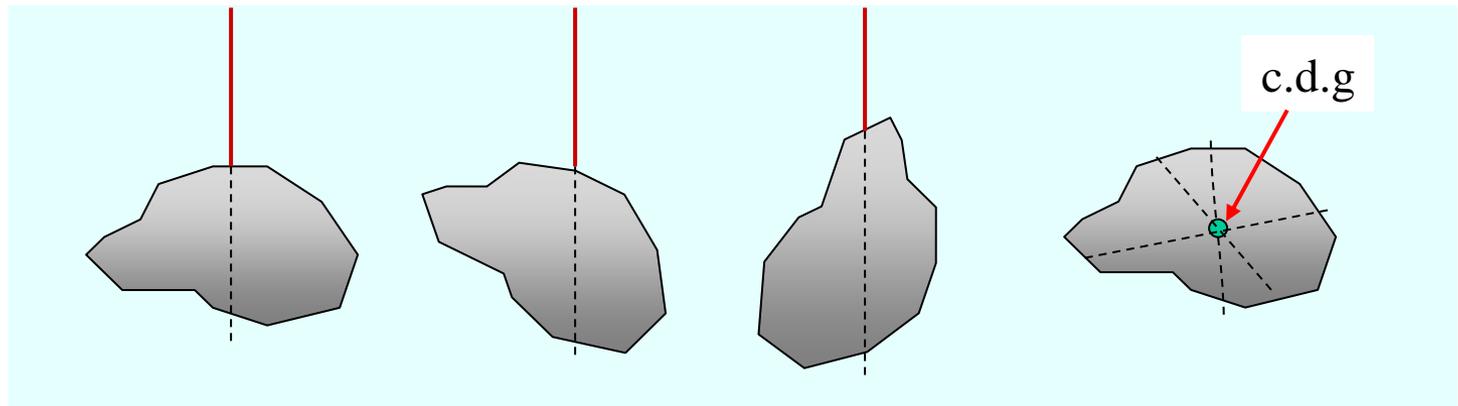
$$\begin{cases} \vec{R} = 0 \\ \vec{M} = 0 \end{cases}$$



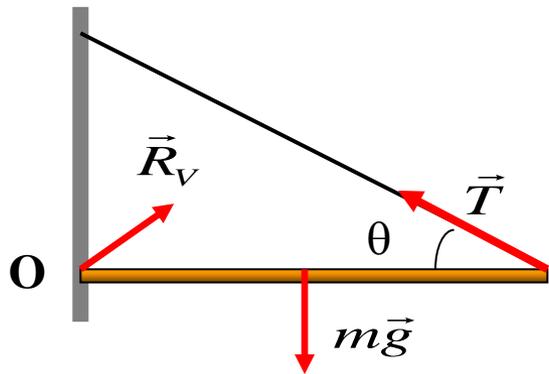
in equilibrio non solo $T = mg$

le due forze hanno la **stessa retta d'azione**

metodo per determinare la posizione del c.d.m. di un sistema arbitrario.

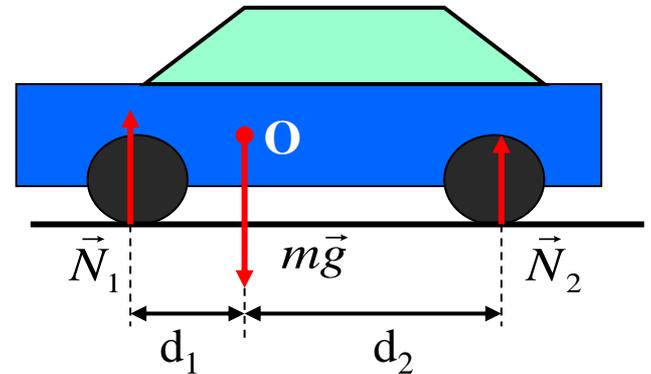


Equilibrio di un corpo rigido.



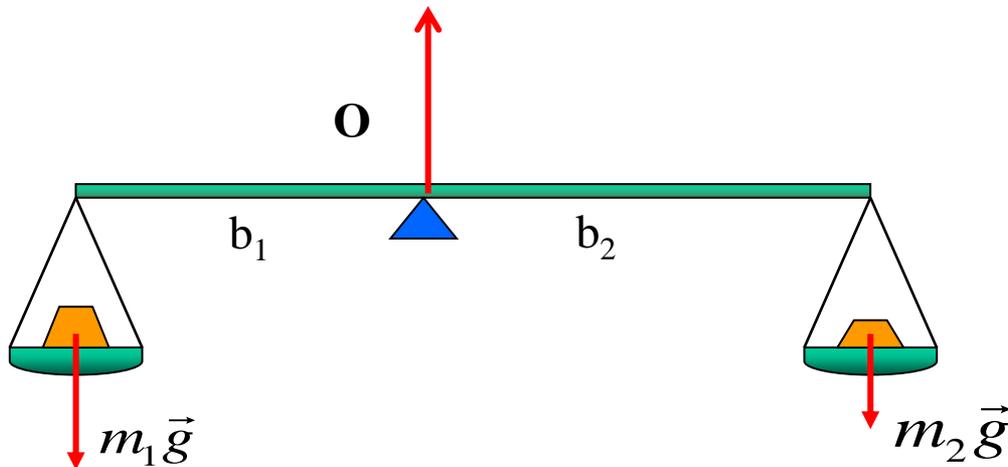
$$\begin{cases} R_{vX} + T_x = 0 \\ R_{vY} + T_y - mg = 0 \\ Tl \sin \theta - mg \frac{l}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1 + N_2 - mg = 0 \\ N_2(d_1 + d_2) - m_1gd_1 = 0 \end{cases}$$



$$m_1gb_1 - m_2gb_2 = 0$$

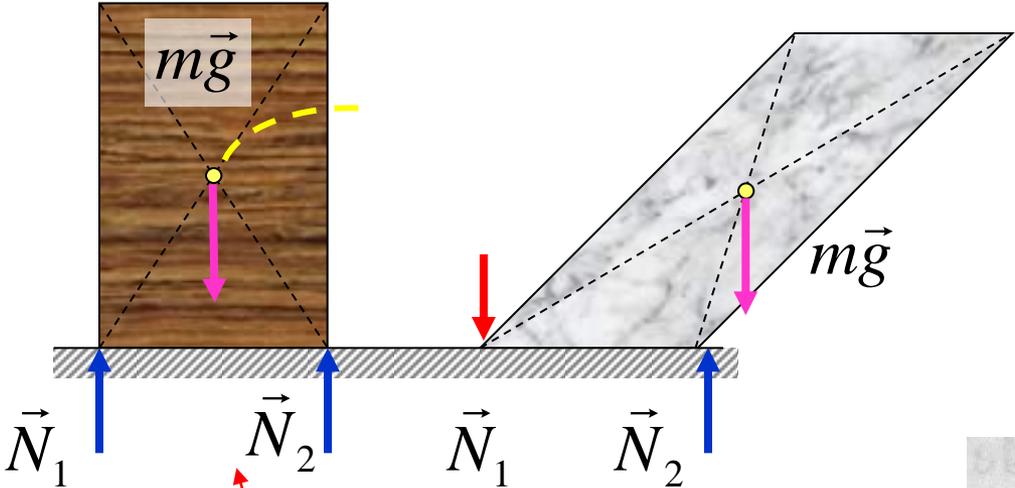
$$m_1b_1 = m_2b_2$$



Equilibrio di un corpo rigido.

equilibrio stabile

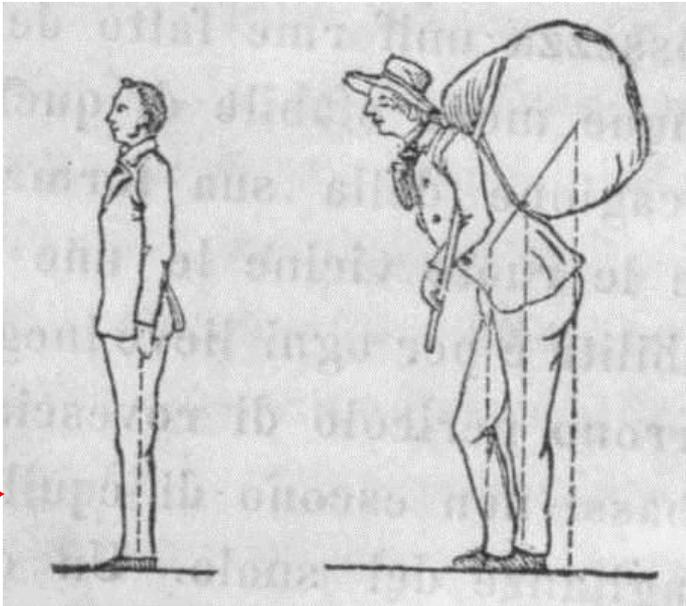
equilibrio impossibile



equilibrio su una superficie orizzontale piana

Che lavoro si deve fare per ribaltare questo blocco?

diverse posture garantiscono che il c.d.m. cada entro il perimetro di base



Rotazione di un Corpo Rigido intorno ad un asse fisso (asse z)

Momento angolare

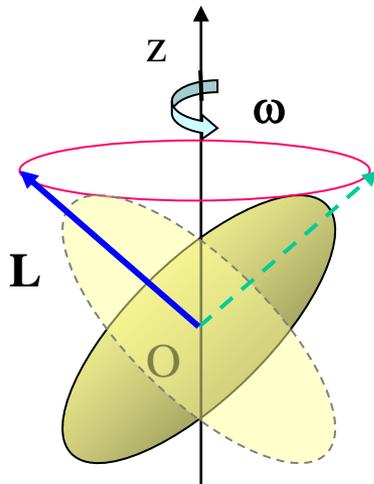
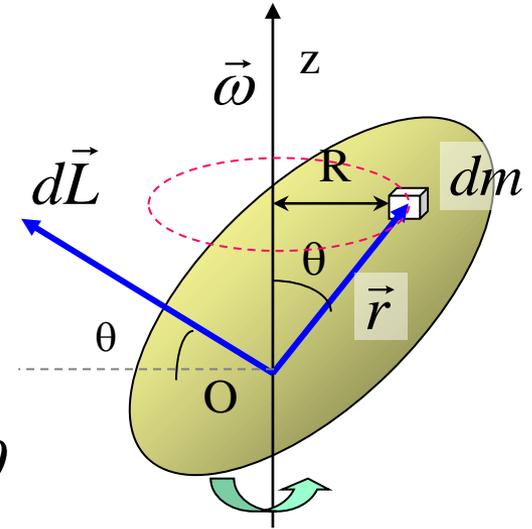
in questo caso si scelga un polo O sull'asse di rotazione

$$\vec{L} = \int_V \underbrace{\vec{r} \times \vec{v}}_{d\vec{L}} dm = \int_V \rho \vec{r} \times \vec{v} dV$$

$d\vec{L}$

$$v = \omega R = \omega r \sin \theta$$

$$dL = dmrv = dm\omega r^2 \sin \theta$$



In generale **L NON E' parallelo all'asse di rotazione** (cioè ad ω)

in tal caso è necessario un momento per mantenere il corpo in rotazione

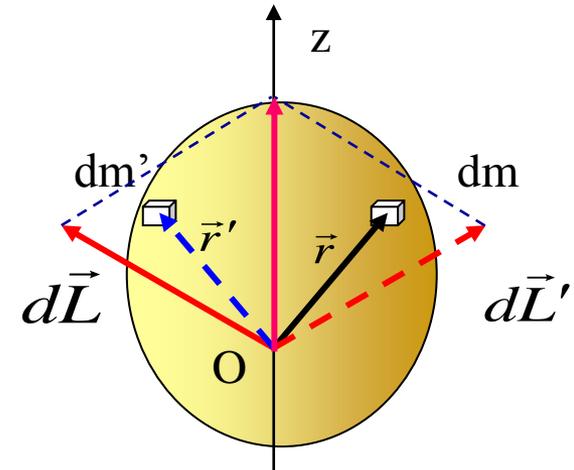
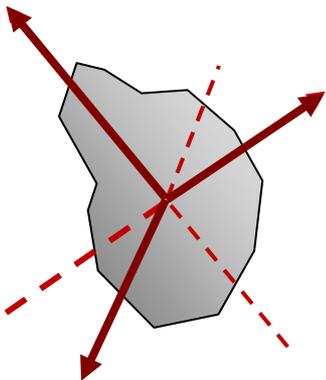
$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \neq 0$$

Rotazione di un Corpo Rigido intorno ad un asse fisso (asse z)

Momento angolare

il momento angolare è parallelo all'asse di rotazione se il corpo rigido è **simmetrico rispetto ad esso**

tuttavia si dimostra che ogni sistema possiede (almeno) **3 assi ortogonali** fra loro (**assi principali d'inerzia**) tali che:

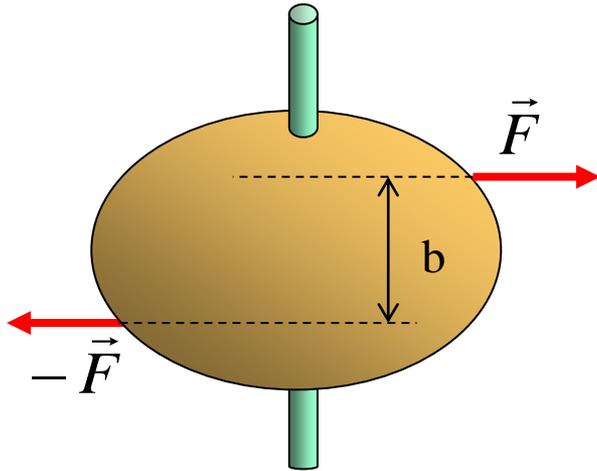


Polo O sull'asse di simmetria

L è parallelo ad ω se l'asse di rotazione è un asse principale d'inerzia

Rotazione di un Corpo Rigido intorno ad un asse fisso (asse z)

Se l'asse di rotazione è fisso c'è **un solo grado di libertà**: il problema si semplifica



un momento ortogonale all'asse non ha effetto sul moto

[si suppone che non ci sia attrito sull'asse di rotazione (albero)]

basta la componente z (lungo l'asse):

$$M_Z = \frac{dL_Z}{dt}$$

Caso discreto: la massa m_k a distanza R_k dall'asse contribuisce

$$L_{k,Z} = m_k \omega R_k^2$$

$$L_Z = \left(\sum_k m_k R_k^2 \right) \omega = I_Z \omega$$

momento d'inerzia del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione z

Rotazione di un corpo rigido. Momento d'inerzia.

$$L_Z = I_Z \omega \quad \text{dove}$$

$$I_Z = \sum_K m_k R_k^2$$

(sistema discreto)

$$I_Z = \int dm R^2 = \int \rho R^2 dV$$

(sistema continuo)

momento d'inerzia
del corpo rigido **rispetto**
all'asse di rotazione Z

$$I_Z = \int \rho (x^2 + y^2) dV$$

$$[I] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

grandezza scalare

distanza dall'asse

Se l'asse di rotazione coincide con un asse di simmetria (più in generale un asse principale d'inerzia) vale anche la relazione vettoriale:

$$\vec{L} = I_Z \vec{\omega}$$

Rotazione di un corpo rigido intorno ad un **asse fisso** (z)

Il Teorema del Momento Angolare assume la forma:

$$M_z = I_z \frac{d\omega}{dt}$$

$$M_z = I_z \alpha$$

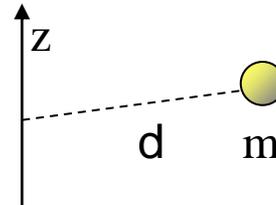
Equazione del moto di rotazione (intorno all'asse fisso z)

Analogia con la 2^a L. Newton

I_z è **costante** perché il corpo è **rigido** e l'asse di rotazione è **fisso**

Alcuni momenti d'inerzia.

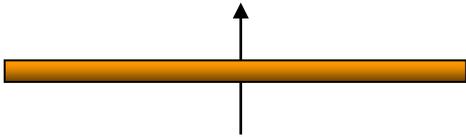
punto materiale a distanza d dall'asse



$$I_z = md^2$$

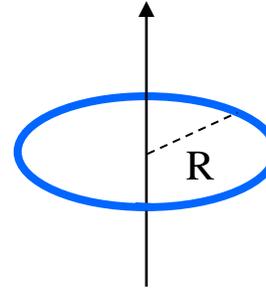
Momenti d'inerzia di alcuni solidi omogenei

rispetto ad un asse passante per il c.d.m.



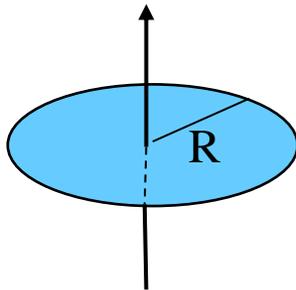
$$I_Z = \frac{m}{12} \ell^2$$

sbarra di massa **m**, lunghezza **ℓ**,
risp. asse ortogonale passante per il cdm:



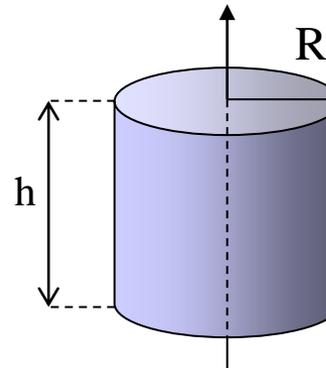
Anello, rispetto
al proprio asse.

$$I_Z = mR^2$$



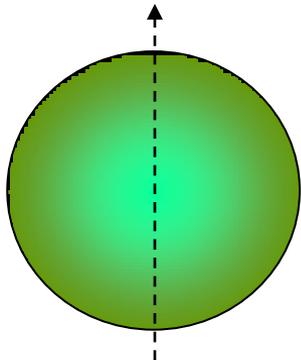
$$I_Z = \frac{m}{2} R^2$$

Cerchio, rispetto
al proprio asse.



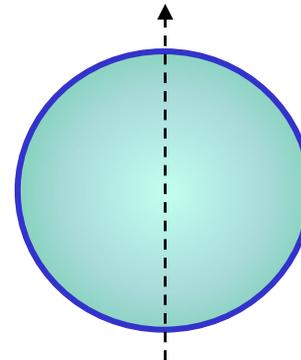
Cilindro, rispetto
al proprio asse.

$$I_Z = \frac{m}{2} R^2$$



Sfera piena risp. ad un asse.

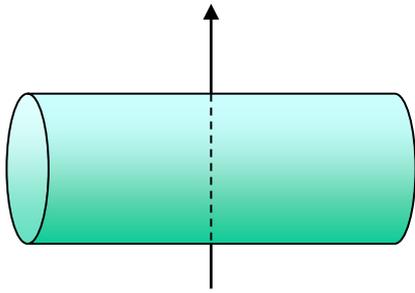
$$I_Z = \frac{2}{5} mR^2$$



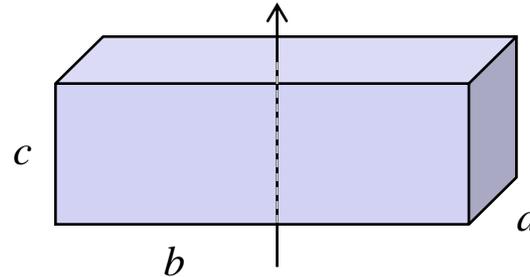
Guscio sferico.

$$I_Z = \frac{2}{3} mR^2$$

Dipendenza del momento d'inerzia dall'asse di rotazione

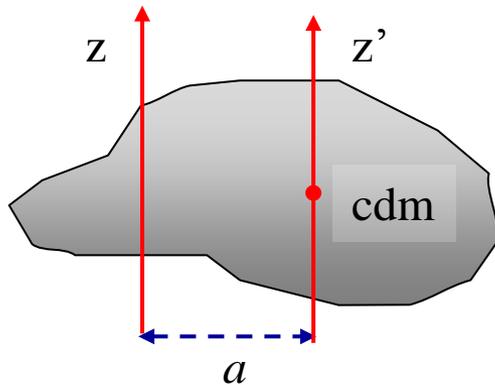


$$I_Z = \frac{m}{4} R^2 + \frac{m}{12} h^2$$



$$I_Z = \frac{m}{12} (a^2 + b^2)$$

Caso di assi paralleli



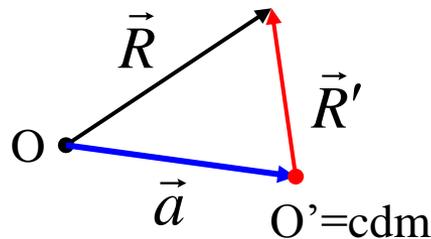
$$\vec{R} = \vec{R}' + \vec{a}$$

$$I_Z = \int_V \rho R^2 dV =$$

$$\int_V \rho (R'^2 + a^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{R}') dV =$$

$$I_{CM} + ma^2 + 2\vec{a} \cdot \underbrace{\int_V \rho \vec{R}' dV}_{m\vec{R}'_{CM} = 0}$$

$$m\vec{R}'_{CM} = 0$$

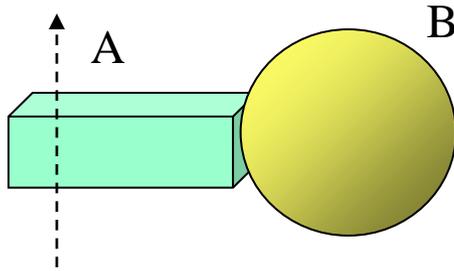


$$I = I_{CM} + ma^2$$

Teorema di Huygens-Steiner

Altre proprietà del momento d'inerzia

Sistema composto



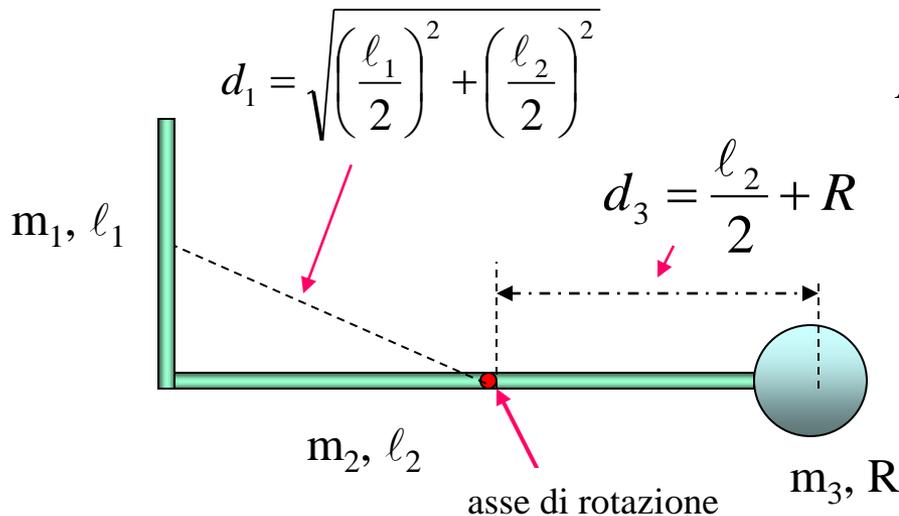
$$I_Z = \int_{V_A+V_B} \rho R^2 dV =$$

$$\int_{V_A} \rho R^2 dV + \int_{V_B} \rho R^2 dV$$

$$I_Z = I_{AZ} + I_{BZ}$$

il momento d'inerzia è additivo (purché ...)

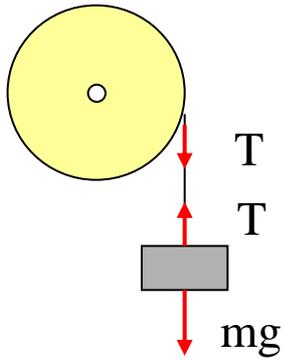
Esempio: il sistema in figura ruota rispetto ad un asse ortogonale al piano del disegno, passante per il cdm della sbarretta lunga. Calcolare il momento d'inerzia.



$$I = \left(I_{1,CM} + m_1 d_1^2 \right) + I_{2,CM} + \left(I_{3,CM} + m_3 d_3^2 \right)$$

$\frac{m_1}{12} \ell_1^2$ $\frac{m_2}{12} \ell_2^2$ $\frac{2}{5} m_3 R^2$

Esempi di rotazione di un corpo rigido. (con asse fisso)

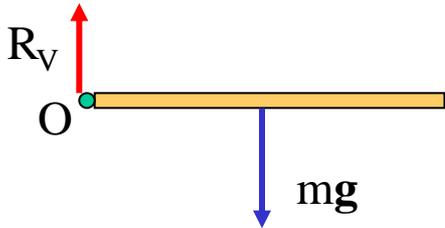


$$s = R\theta$$

$$v = \omega R$$

$$a = \alpha R$$

$$\begin{cases} I\alpha = TR \\ ma = mg - T \\ \alpha R = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{mR^2}{I + mR^2} g \\ T = \frac{I}{I + mR^2} mg \end{cases}$$



Sbarra di massa m e lunghezza ℓ , inizialmente in quiete in posizione orizzontale, è vincolata a ruotare intorno al perno O. Calcolare

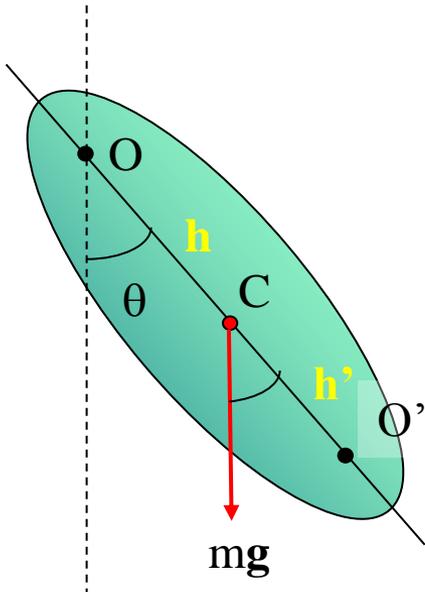
- l'accelerazione angolare della sbarra appena rilasciata
- la reazione vincolare in quell'istante

$$I_0\alpha = M_0 \quad \text{con} \quad I_0 = \frac{m}{3}\ell^2 \quad \text{e} \quad M_0 = mg\frac{\ell}{2} \quad \alpha = \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}$$

$$\vec{R}_V + m\vec{g} = m\vec{a}_{CM} \quad R_V - mg = -ma_{CM} \quad R_V = \frac{mg}{4}$$

Esempi di rotazione di un corpo rigido con asse fisso

piccole oscillazioni di un «Pendolo composto»



$$I_Z \alpha = M_Z \quad \text{con} \quad M_Z = mgh \sin \theta$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = -mgh \sin \theta$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = - \left(\frac{mgh}{I} \right) \sin \theta \quad \text{per piccoli angoli ...}$$

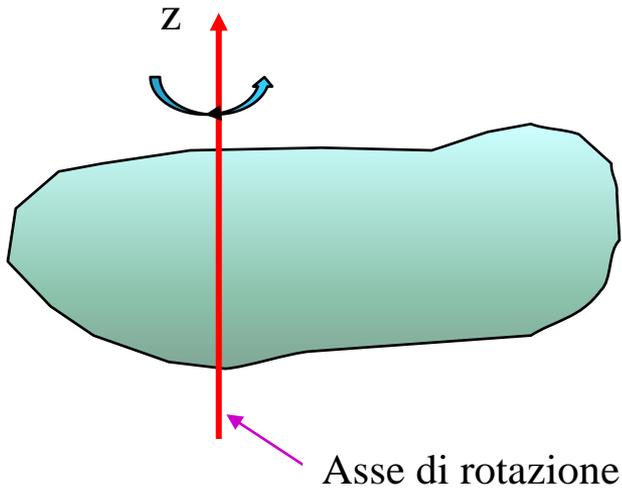
$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} \cong - \underbrace{\left(\frac{mgh}{I} \right)}_{\omega^2} \theta \quad \text{moto armonico} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

con $\ell = \frac{I}{mh}$ «lunghezza ridotta del pendolo composto»

$$\ell = \frac{I_C}{mh} + h = h' + h \quad (I_C = mhh') \quad \text{stesso periodo intorno ad } O'$$

Energia Cinetica di un corpo rigido che ruota intorno ad un asse fisso



Considerando per semplicità un sistema discreto:

$$E_K = \sum_k \frac{m_k}{2} v_k^2$$

essendo rigido: $v_k = \omega R_k$

$$E_K = \sum_k \frac{m_k}{2} (\omega R_k)^2 = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\sum_k m_k R_k^2}_{I_Z} \right) \omega^2$$

momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione

I_Z

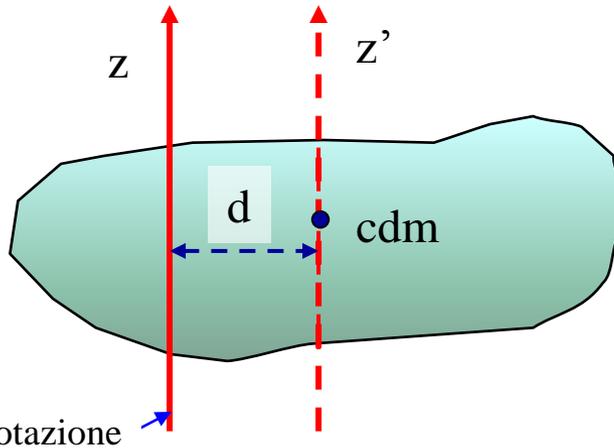
Energia cinetica

$$E_K = \frac{1}{2} I_Z \omega^2$$

In questa formula non compare il moto del cdm. Come mai?

Energia Cinetica di un corpo rigido che ruota intorno ad un asse fisso

per il teorema di König dell'Energia cinetica



$$E_K = E_{Kcm} + E'_K$$

$$E_K = \frac{m}{2} v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$$

è un'altra espressione dell'energia cinetica.

L'equivalenza delle due espressioni è confermata dal **Teorema di Huygens-Steiner:**

$$E_K = \frac{1}{2} I_Z \omega^2 = \frac{1}{2} (I_{cm} + md^2) \omega^2$$

tenendo conto che

$$\omega d = v_{cm}$$

Energia potenziale di un corpo rigido (forza peso)

Le forze peso che agiscono sulle singole parti di un corpo rigido sono equivalenti alla forza peso totale applicata nel centro di massa.

L'energia potenziale della forza peso dipende solo dalla **posizione del centro di massa**.

$$E_P = mgy_{cm}$$

come per ogni sistema di punti materiali, inoltre:

Teorema dell'energia cinetica:

$$W_{TOT} = \Delta E_K$$

Teorema di conservazione dell'energia meccanica
se tutte le forze sono conservative:

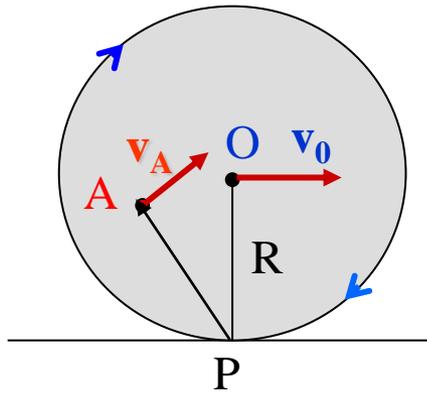
$$E_M = E_K + E_P = cost$$

in presenza di forze non conservative:

$$W_{NC} = \Delta E_M$$

(l'unica particolarità è che nel corpo rigido le forze interne non fanno lavoro)

Moto di puro rotolamento



centro istantaneo di rotazione

moto di rototraslazione in cui il punto di contatto P ha velocità nulla rispetto alla superficie d'appoggio

$$\vec{v}_A = \cancel{\vec{v}_P} + \vec{\omega} \times \vec{PA}$$

$$v_O = \omega R$$

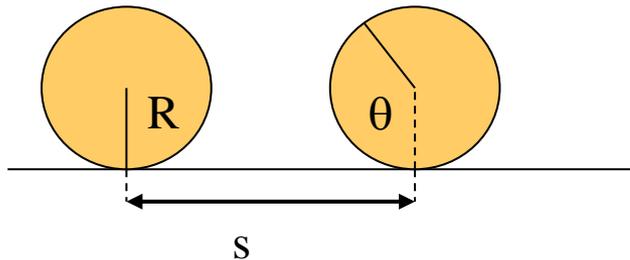
$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OA}$$

rotazione + traslazione

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{PA}$$

pura rotazione istantanea intorno a P

} due modi di vedere il moto



$$s = R\theta$$

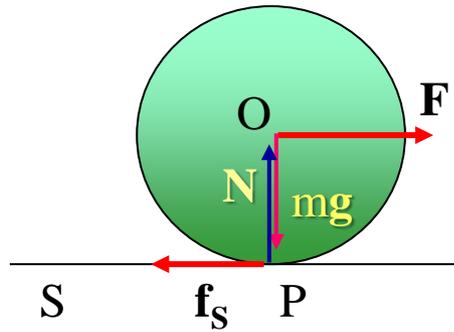
$$v = \omega R$$

$$a = \alpha R$$



In P agiscono le forze di contatto \mathbf{N} e \mathbf{f}_S (attrito statico se il moto è di puro rotolamento).

Dinamica del rotolamento



$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{FR^2}{I_0 + mR^2} \\ f_s = F \frac{I_0}{I_0 + mR^2} \\ N = mg \end{array} \right.$$

$$f_s \leq \mu_s N = \mu_s mg$$

Condizione di rotolamento

$$F \leq \mu_s mg \left(\frac{I_0 + mR^2}{I_0} \right)$$

1° caso) **F** forza esterna applicata nel cdm

$$\left\{ \begin{array}{l} F - f_s = ma \\ N - mg = 0 \\ I_0 \alpha = f_s R \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Teor. moto cdm} \\ \\ \leftarrow \text{rotazione rispetto al cdm O} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F - f_s = ma \\ N - mg = 0 \\ I_P \alpha = FR \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{con } a = \alpha R \\ \\ \leftarrow \text{rotazione rispetto a P} \\ \text{con } I_P = I_0 + mR^2 \end{array}$$

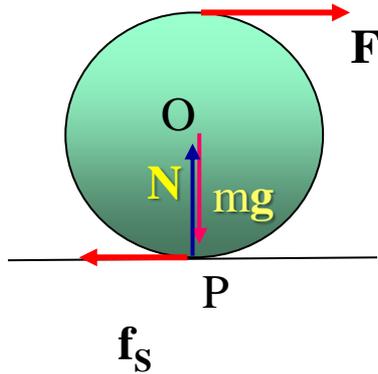
Nota 1: $f_s > 0$: l'attrito ha lo stesso verso del disegno (opposto ad F). Non è sempre così. A volte favorisce il moto di traslazione (v. prossimo esempio)

Nota 2: se $F=0$ allora $f_s=0$

su un piano orizzontale il rotolamento non si fermerebbe mai (ma c'è l'attrito volvente).

Dinamica del rotolamento

caso 2) Forza \mathbf{F} applicata sul bordo esterno

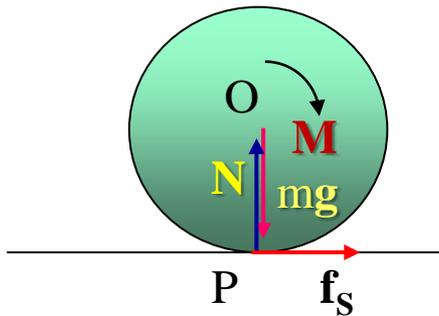


$$\begin{cases} F - f_s = ma \\ N - mg = 0 \\ I_P \alpha = 2FR \end{cases} \quad \text{con} \quad a = \alpha R$$

$$a = \frac{2FR^2}{I_P} \quad f_s = -F \frac{2mR^2 - I_P}{I_P} = F \frac{I_0 - mR^2}{I_0 + mR^2} < 0$$

f_s è concorde con \mathbf{F} : in assenza di attrito l'accelerazione sarebbe minore

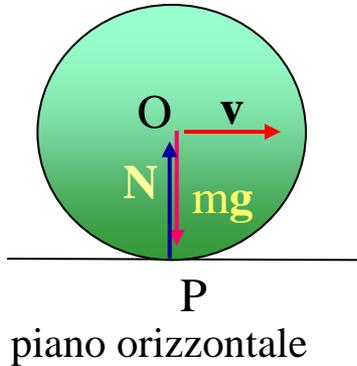
caso 3) Momento \mathbf{M} (coppia) sull'asse del corpo rigido.



$$\begin{cases} f_s = ma \\ N - mg = 0 \\ I_P \alpha = M \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{R}{I_P} M \\ f_s = \frac{mR}{I_P} M > 0 \end{cases}$$

l'accelerazione del c.d.m. è causata proprio da f_s

Rotolamento. Attrito volvente (cenni)



$$\text{se } \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{f}_s = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{cost}$$

In realtà, però, la sfera si ferma.

Esiste un **attrito volvente** o **di rotolamento**.

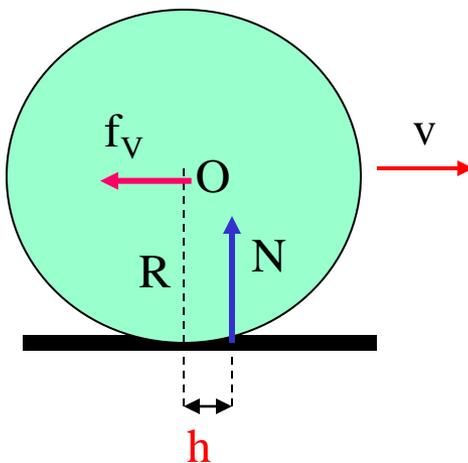
Si può schematizzare come un **momento** che si oppone al moto:

$$M_V = hN$$

↑ ← Reazione normale

Coefficiente di attrito volvente.

Ha le dimensioni di una lunghezza.

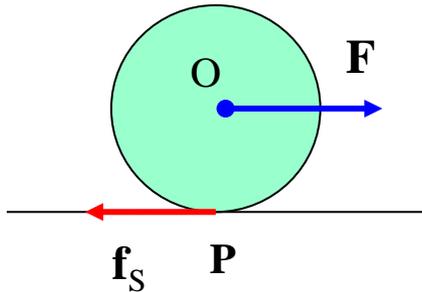


Interpretazione: a causa della deformazione della superficie di contatto è come se il punto di applicazione di N fosse spostato, con braccio h.

In modo equivalente, si può pensare ad una forza di attrito volvente (f_v) orizzontale, applicata al centro della ruota, di momento (risp. a P):

$$f_v R = hN \quad \text{ovvero} \quad f_v = \mu_v N$$

Lavoro della forza di attrito statico nel puro rotolamento



$$E_K = \frac{1}{2} I_P \omega^2$$

$$I_P \alpha = FR$$

$$dE_K = I_P \omega \alpha dt = I_P \omega \alpha dt$$

$$dE_K = FR \omega dt = Fv dt = dW_F$$

$$dE_K = dW_F + dW_A \Rightarrow dW_A = 0$$

solo **F** fa lavoro

In alternativa

$$E_K = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + \frac{m}{2} v^2$$

$$dE_K = I_0 \omega \alpha dt + mav dt$$

$$\begin{cases} I_0 \alpha = f_s R \\ ma = F - f_s \end{cases}$$

da cui

$$dW_A = -f_s ds + f_s R d\theta = 0$$

Lavoro di
traslazione

Lavoro di
rotazione

L' attrito statico **converte energia cinetica dal moto di rotazione a quello di traslazione** (o viceversa)

Leggi di conservazione con il corpo rigido. Momento angolare

rispetto ad un polo fisso, o coincidente con il c.d.m.
essendo \vec{M} il momento risultante

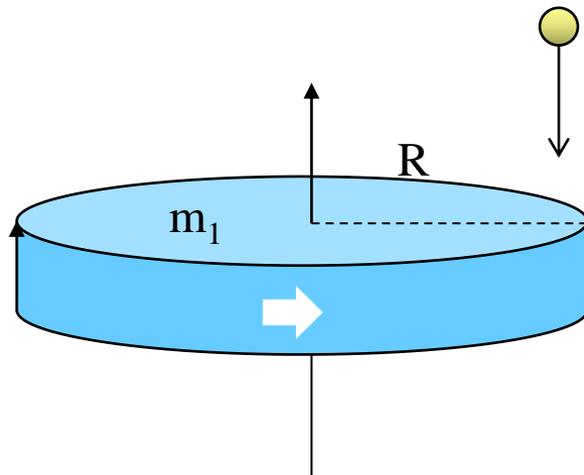
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

se $\vec{M}=0$ (ad es. se il sistema è isolato) il momento angolare è costante.

se il sistema ha un asse di rotazione fisso (Z)

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z$$

se $M_z=0$ la componente Z del momento angolare (L_z) è costante.



velocità finale (dopo l'urto)?

Teorema del momento angolare

Formulazione integrale

$$\Delta \vec{L} = \vec{L}_f - \vec{L}_i = \int \vec{M} dt \quad \leftarrow \text{Impulso del momento}$$

$$\Delta \vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{F} dt$$

Se il punto di applicazione della forza non si sposta nell'intervallo Δt di applicazione ... (forza impulsiva)

$$\Delta \vec{L} = \vec{r} \times \int \vec{F} dt = \underbrace{\vec{r} \times \vec{J}}$$

Momento dell'impulso

$$\Delta \vec{L} = \vec{r} \times \vec{J}$$

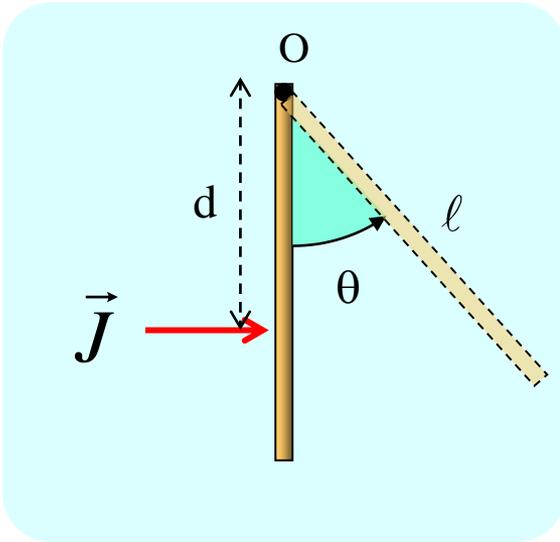
Teorema del momento dell'impulso

Se il sistema ruota intorno ad un asse fisso Z:

$$\Delta L_z = \int M_z dt$$

$$\Delta L_z = \left(\vec{r} \times \vec{J} \right)_z$$

Teorema del momento angolare. Formulazione integrale



calcolando i momenti rispetto ad O (sull'asse di rotazione)

$$\Delta L_z = Jd$$

$$\Delta L_z = I_z \omega$$

dal teorema del moto del c.d.m.

$$m(\vec{v}_{cm,f} - \vec{v}_{cm,i}) = \vec{J}_{EXT}$$

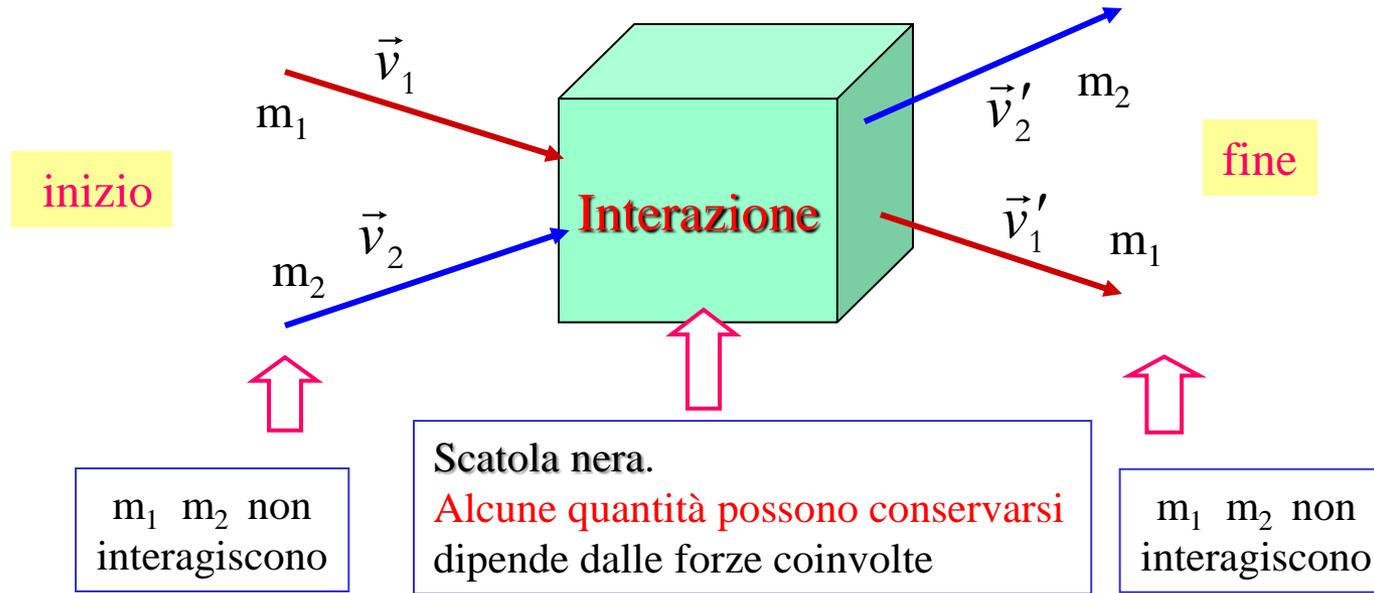
con $v_{cm,f} = \omega_f \frac{\ell}{2}$

$$\vec{J}_{EXT} = \vec{J} + \vec{J}_V$$

calcolare ω_f e J_V

mostrare che $J_V=0$ se $d = \frac{2}{3}\ell$

Schema di urto



Anche senza conoscere i dettagli, i principi di conservazione pongono limitazioni allo stato finale.

Nei casi più semplici sono sufficienti per determinare lo stato finale

$$\vec{p}_{TOT} = \text{cost}$$

Se non ci sono forze esterne impulsive

$$\vec{L}_{TOT} = \text{cost}$$

Se non ci sono forze esterne impulsive o se il loro momento è nullo (risp. al polo prescelto)

$$E_K = \text{cost}$$

Se le forze (impulsive) sono conservative

Urti in cui è coinvolto almeno un corpo rigido

Il criterio per l'applicazione dei principi di conservazione non cambia.

Energia cinetica

si conserva se l'urto è elastico (forze conservative)

Quantità di moto

$$\Delta \vec{p} = \int_t^{t+\Delta t} \vec{R}^{(E)} dt = \vec{J}^{(E)}$$

\mathbf{p} si conserva nell'urto se $\mathbf{J}^{(E)}=0$

Ciò avviene se:

le forze esterne sono nulle (sistema isolato) $\mathbf{R}^{(E)}=0$

le forze esterne non sono impulsive per cui $\mathbf{J}^{(E)}=0$ nel tempuscolo Δt
(**Attenzione:** in presenza di vincoli dobbiamo aspettarci reazioni vincolari impulsive!)

Momento angolare

$$\Delta \vec{L} = \int_t^{t+\Delta t} \vec{M}^{(E)} dt = \vec{r} \times \vec{J}^{(E)}$$

\mathbf{L} si conserva nell'urto se $\mathbf{r} \times \mathbf{J}^{(E)}=0$

Ciò avviene se:

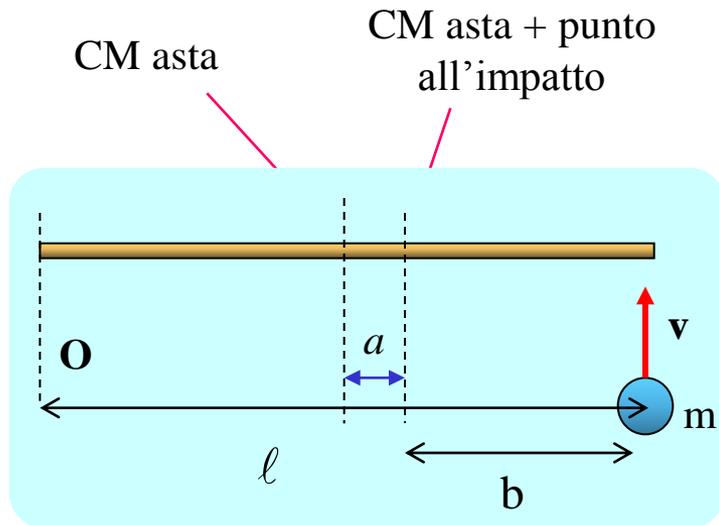
le forze esterne sono nulle (sistema isolato) per cui $\mathbf{M}^{(E)}=0$

le forze esterne non sono impulsive per cui $\mathbf{J}^{(E)}=0$

rispetto ad ogni polo

le forze esterne sono impulsive (es. vincoli) ma $\mathbf{r} \times \mathbf{J}^{(E)}=0$ rispetto ad un polo opportuno
(in particolare, in presenza di vincoli, potrebbe conservarsi rispetto al vincolo stesso)

Esempio 1. Asta di massa M e lunghezza ℓ in quiete su un **piano orizzontale liscio**, colpita da un “punto” di massa m e velocità v che vi resta attaccato.



Urto totalmente inelastico

Urto inelastico: E_K non si conserva.

Sistema isolato. Quindi:

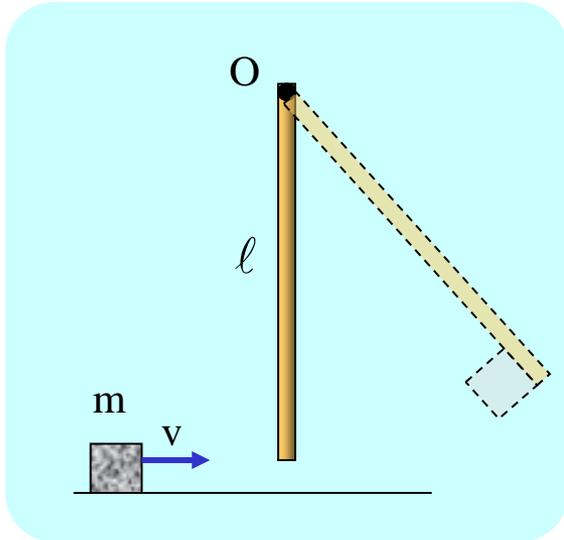
p si conserva

L si conserva rispetto ad ogni polo

La soluzione è piuttosto complicata, ma si ottiene a partire dai due principi di conservazione

Esempio 2. Urto totalmente inelastico

Asta di massa M e lunghezza ℓ , sospesa all'estremo O e vincolata a ruotare senza attrito intorno al punto di sospensione



- Urto inelastico: E_K non si conserva.
- Presenza di vincoli: forze esterne (vincolari) impulsive.
Non si conserva p
- A causa delle reazioni vincolari impulsive ivi applicate,
 L si conserva ma solo rispetto ad O .

$$mvl = I'_O \omega$$

momento angolare
iniziale

momento angolare
finale

con $I'_O = I_{AO} + m\ell^2$

Trovato ω si può calcolare l'impulso esercitato dal vincolo durante l'urto.

$$\vec{J}_V = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

Poiché tutti i vettori hanno la stessa direzione

$$J_V = p_f - p_i$$

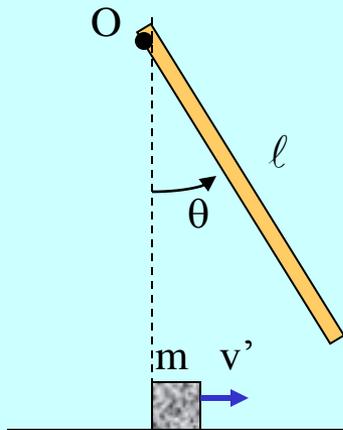
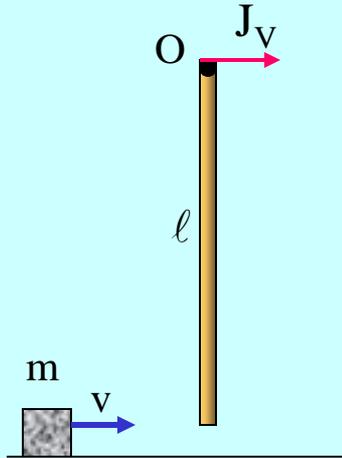
dove $p_i = mv$

$$p_f = m_{TOT} v_{CM} = (M + m)\omega r_{CM}$$

e $r_{CM} = \frac{m\ell + M\ell/2}{M + m}$

Esempio 3. Urto elastico

Asta di massa M e lunghezza l , sospesa all'estremo O e vincolata a ruotare senza attrito intorno al punto di sospensione.



- Urto elastico: E_K si conserva.
- Presenza di vincoli: forze esterne (vincolari) impulsive.
Non si conserva p
- A causa delle reazioni vincolari impulsive ivi applicate,
 L si conserva solo rispetto ad O .

$$\begin{cases} \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} v'^2 + \frac{I_0}{2} \omega^2 & \text{cons. energia cinetica} \\ mv\ell = I_0 \omega + mv'\ell & \text{cons. momento angolare} \end{cases}$$

\uparrow \uparrow
 L iniziale L finale

Risolto il problema del moto dopo l'urto, si può calcolare J_v (impulso delle forze vincolari).

$$J^{(E)} = p_f - p_i = \left(mv' + M\omega \frac{\ell}{2} \right) - mv$$