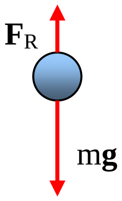
Effetto della resistenza dell'aria sul moto dei gravi.

E' noto che in assenza dell'aria tutti i corpi sono soggetti alla stessa accelerazione **g** in un dato luogo. Tale moto è particolarmente semplice e quindi ampiamente utilizzato in esempi ed esercizi; resta il problema di sapere quando è lecito trascurare la resistenza dell'aria e quanto buone sono certe approssimazioni. In ciò che segue si discuterà, per cominciare, la semplice caduta di una sfera inizialmente in quiete e infine il moto dei proiettili.
Una sfera di velocità v immersa in un fluido è soggetta ad una forza di "resistenza del mezzo" che, per oggetti macroscopici e/o velocità abbastanza grandi si può scrivere $F_R = \frac{1}{2} C\rho_F S v^2$, dove ρ_F è la densità del fluido (per l'aria considereremo $\rho_F=\rho_A=1.23$kg), S è la "sezione frontale" (per una sfera di raggio R $S=\pi R^2$) e C è il "coefficiente di penetrazione" (per le automobili è chiamato comunemente CX) che in generale dipende dalla velocità (C=C(v)) ma che si può di norma approssimare con una costante: C=0.5. Tale forza è "opposta al moto" ovvero ha la stessa direzione della velocità e verso opposto.



Per una sfera che sta cadendo, assunto positivo il verso in giù, l'equazione del moto è:

$$mg - \frac{1}{2} C\rho_F S v^2 = ma \quad (1)$$

Prima ancora di risolvere questa equazione è possibile trarre importanti conclusioni dall'equazione (1).

Condizioni per cui si può trascurare la resistenza dell'aria. E' lecito trascurare la resistenza dell'aria se questa è piccola rispetto alla forza peso, in altre parole se $\frac{1}{2} C\rho_F S v^2 << mg$ ovvero se la velocità della sfera soddisfa la relazione:

$$v << \sqrt{\frac{2mg}{C\rho_A S}} = v_L \qquad (2)$$

Per capire se è lecito trascurare la resistenza dell'aria, senza risolvere l'equazione (1), si può calcolare la velocità massima che sarebbe raggiunta in assenza d'aria e verificare se questa velocità soddisfa la (2). Se ciò avviene, è lecito trascurare la presenza dell'aria, altrimenti bisogna aspettarsi correzioni più o meno grandi a seconda di quanto è violata la (2): deviazioni sensibili se $v_{\max} \approx v_L$, mentre se risultasse $v_{\max} >> v_L$ trascurare la resistenza dell'aria conduce a risultati assolutamente non realistici.

Andamento qualitativo della velocità in funzione del tempo. Inizialmente, per v=0, l'accelerazione è pari a g. All'aumentare della velocità aumenta la resistenza dell'aria e ciò fa diminuire l'accelerazione; continuando di questo passo l'accelerazione si riduce fino ad annullarsi: da questo punto in poi la velocità rimane costante. L'accelerazione si annulla quando il primo membro della (1) è zero, cioè per $v = v_L$, è questo il valore limite della velocità, detta velocità limite. E' facile convincersi che $v \to v_L$ indipendentemente dalla velocità iniziale, perciò ogni corpo, libero di muoversi in aria, raggiunge una velocità limite se ne ha il tempo, ovvero se cade da un'altezza sufficiente. La velocità limite dipende dalla geometria e dalla massa del corpo: per una sfera di raggio R e densità ρ: $v_L = \sqrt{\frac{8\rho R g}{3C\rho_A}}$. Fissate C, ρ_A e g, v_L aumenta all'aumentare delle dimensioni (R) e della densità (ρ): i corpi più grandi e/o più pesanti sono più veloci.

Soluzione dell'equazione differenziale. Dalla definizione di velocità limite, la resistenza dell'aria si può scrivere $\frac{1}{2}C\rho_F S v^2 = mg\frac{v^2}{v_L^2}$, quindi l'equazione (1) assume la forma $\frac{dv}{dt} = g\left(1-\frac{v^2}{v_L^2}\right)$.

Separando le variabili e definendo $y = \frac{v}{v_L}$ si ottiene $\frac{dy}{1-y^2} = \frac{g}{v_L}dt$ che si integra facilmente:

$\operatorname{artanh} y - \operatorname{artanh} y_0 = \frac{g}{v_L}t$ (dove $y(0) = y_0 = \frac{v_0}{v_L}$ e v_0 è la velocità iniziale, purché in giù). Risulta:

$$v(t) = \frac{v_0 + v_L \tanh\left(\frac{gt}{v_L}\right)}{1+\frac{v_0}{v_L}\tanh\left(\frac{gt}{v_L}\right)} \qquad (3)$$

Nel caso più semplice, con $v_0=0$ e $x(0)=0$ si trova:

$$v(t) = v_L \tanh\left(\frac{gt}{v_L}\right) \quad \text{e} \quad x(t) = \frac{v_L^2}{g}\ln\left(\cosh\frac{gt}{v_L}\right) \qquad (4)$$

Per chiarire quanto detto sopra, consideriamo il caso di due sfere, una di legno e una di acciaio, di raggio R=1cm. Le densità siano, rispettivamente, $\rho=500kg/m^3$ (legno) e $\rho=8000kg/m^3$ (acciaio) e si assuma $\rho_A = 1.23kg/m^3$ e $C \cong 0.5$.

Per la **sfera di legno** la velocità limite vale 14.6m/s che si raggiunge, in vuoto, con una caduta da un'altezza di 10.8m.

Per la **sfera di acciaio** la velocità limite vale 58.3m/s che si raggiunge, in vuoto, con una caduta da un'altezza di 173m.

Nelle figure seguenti si rappresenta la legge oraria x(t) e la velocità v(t) per le due sfere che cadono da un'altezza di 10m.

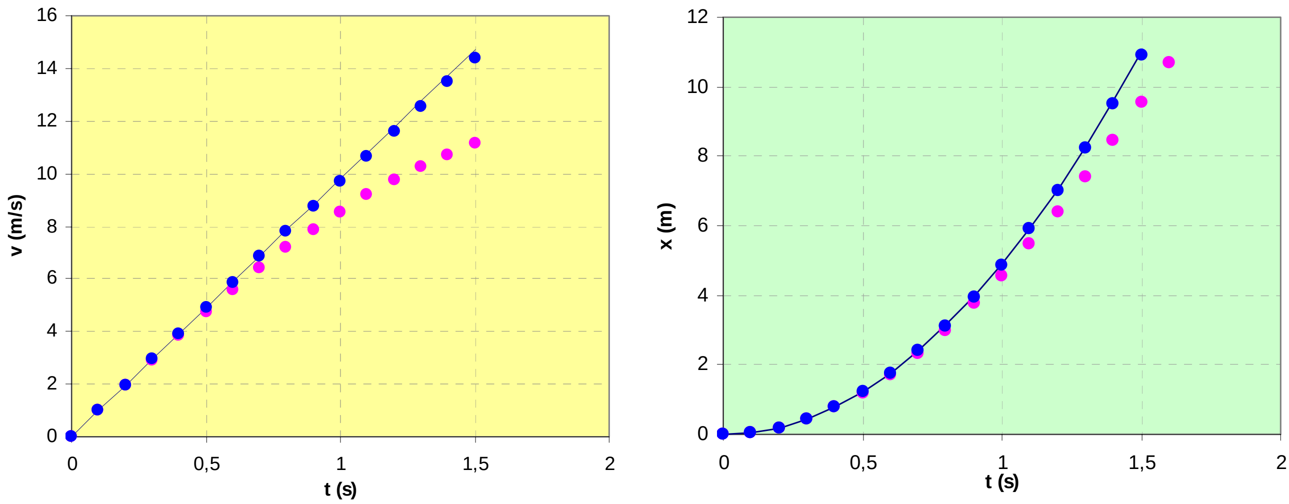


Fig. 1. *Velocità in funzione del tempo (sx) e posizione in funzione del tempo (dx) per una sfera di 2cm di diametro che cade in aria da circa 10m. Punti blu: acciao; punti ciclamino: legno. La linea rappresenta la caduta in vuoto.*

La fig.1 evidenzia che, per quanto riguarda la sfera di acciaio, le differenze rispetto al vuoto sono quasi impercettibili in una caduta da 10m, mentre con una sferetta di legno le deviazioni sono decisamente osservabili. Se si considera una caduta da un'altezza di 100m si osservano deviazioni dal caso del vuoto anche per la sfera di acciaio, mentre per la sfera di legno non esiste neppure un accordo qualitativo.

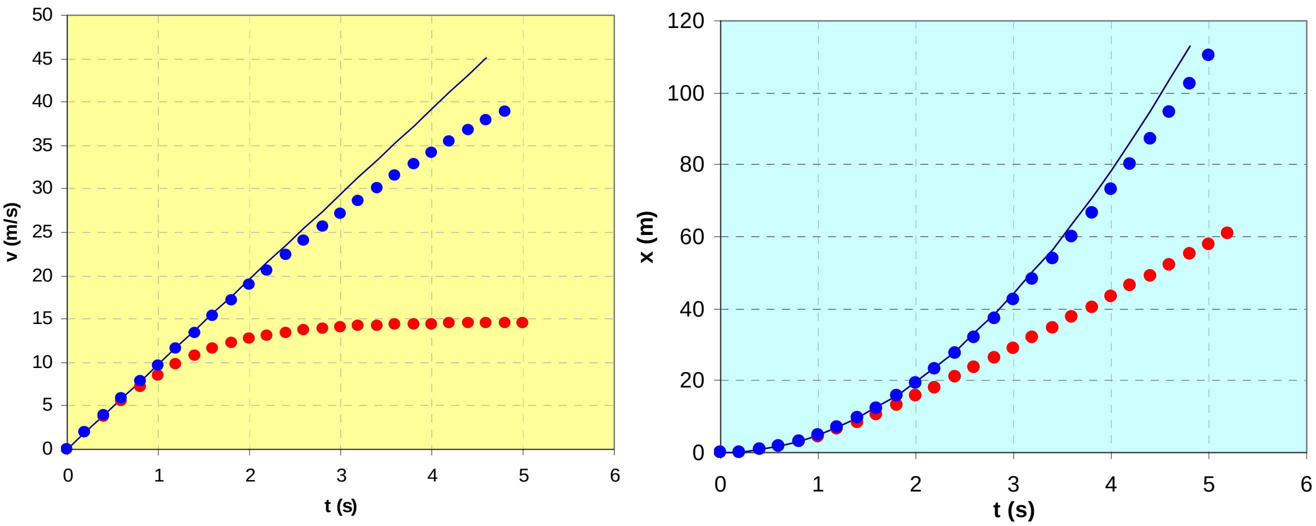


Fig. 2. *Come per la figura 1 ma ora la caduta è da 100m.*

Date le premesse, si intuisce che difficilmente si può trascurare la resistenza dell'aria per i proiettili di arma da fuoco. In questo caso il coefficiente non si può considerare costante perché i proiettili sono spesso supersonici e C è soggetto a rapide variazioni intorno alla velocità del suono. La figura 3 riporta le traiettorie di un proiettile di artiglieria calibro 155mm, di 44kg sparato ad un angolo di 45°. Il coefficiente C si può considerare pari a 0,13 nel grafico a sinistra (v_0=200m/s) mentre nel grafico a destra (v_0=827m/s) varia fra 0,13 e 0,34*. Questi valori corrispondono a velocità limite, rispettivamente, di 960m/s e 600m/s. Nel primo caso la velocità massima (allo sparo) è ancora piuttosto piccola rispetto al suo valore limite e la discrepanza fra la traiettoria in vuoto e quella in aria non è molto grande. Nel secondo caso, al contrario, la velocità massima è addirittura maggiore della velocità limite e la discrepanza fra una traiettoria realistica e quella in vuoto è molto grande.

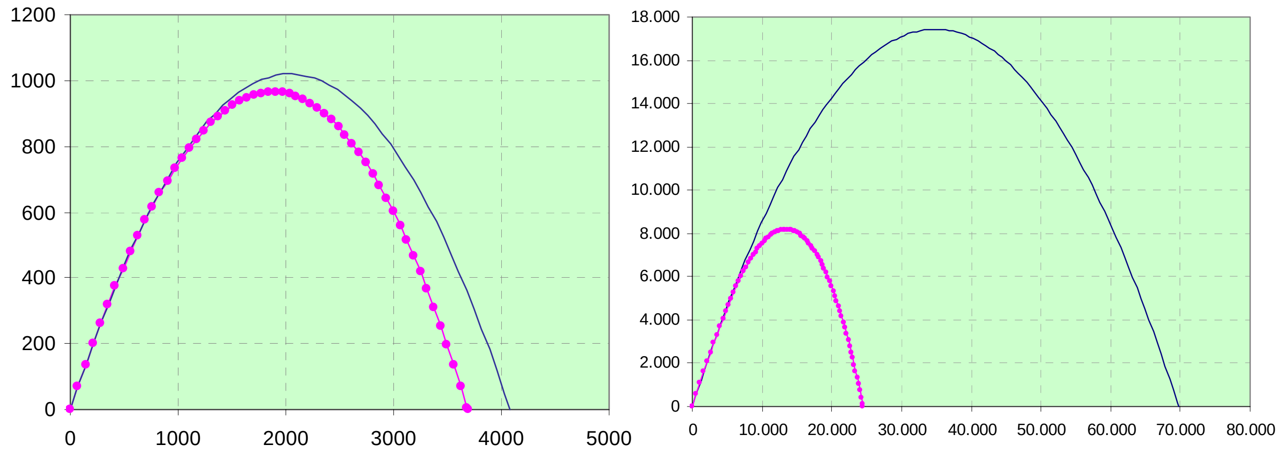


Fig. 3. *Traiettoria di un proiettile di artiglieria (calibro 155, 44kg, sparato a 45°) a sinistra con velocità iniziale 200m/s, a destra con velocità iniziale 827m/s. I punti rappresentano la traiettoria con resistenza dell'aria, le linee continue la traiettoria che avrebbe seguito in vuoto.*

*) Valori aggiustati empiricamente per riprodurre alcune gittate riportate in rete, scalando la funzione C(v) di un fattore costante.