

ESPERIENZA N.1

Determinazione della distribuzione degli errori in una serie di misure ripetute della stessa grandezza fisica

Modificata a partire dalla dispensa per Fisica 1 di Ingegneria (AA. 2007/08 o precedenti)

1. Introduzione

Scopo dell'esperienza è verificare che gli errori casuali nella misura di una grandezza fisica ripetuta molte volte nelle stesse condizioni sperimentali seguono la distribuzione normale o di Gauss.

Nell'esperienza proposta, la grandezza da misurare è l'intervallo di tempo impiegato da una slitta che scivola su un piano inclinato con attrito trascurabile, per percorrere una distanza prefissata.

2. Descrizione dell'apparato sperimentale

L'apparato sperimentale è costituito da una "guidovia a cuscino d'aria" schematicamente rappresentata in **Fig.1**, il cui scopo è di realizzare un moto virtualmente senza attrito della "slitta", da un piccolo elettromagnete (EC) montato alla sommità della guidovia e da un cronometro elettronico collegato a due traguardi fotoelettrici anch'essi fissati sulla guidovia. Questa è così composta:

- un **tubo metallico** lungo all'incirca 1.4 m a **sezione rettangolare**, sulla cui faccia superiore sono praticati numerosi forellini per la fuoriuscita dell'aria compressa; il tubo costituisce il piano sul quale si forma, al passaggio di una slitta opportunamente sagomata, un cuscino d'aria in modo che la slitta stessa possa scorrere con attrito radente trascurabile.

- un basamento metallico sul quale il tubo è montato, che per mezzo di una **vite micrometrica V** può variare la sua inclinazione rispetto al banco di lavoro, approssimativamente orizzontale. **Un giro della vite** corrisponde ad una variazione di inclinazione $\delta\theta=5'$.

- **un compressore d'aria**, a portata variabile, collegato ad un estremo della guida tramite un manicotto flessibile.

I **due traguardi fotoelettrici T1 e T2** sono collocati a fianco della guida e possono essere fissati in diverse posizioni lungo una scala millimetrata solidale col basamento. Essi sono collegati ad un cronometro elettronico; l'elemento fotosensibile emette un impulso elettrico al passaggio della slitta, senza che con essa vi sia contatto materiale.

Il **cronometro elettronico**, per il quale i segnali dai due traguardi funzionano rispettivamente da 'start' e 'stop' per la misura del tempo; nella **scala "10K"** il cronometro misura i tempi con sensibilità pari a **0.1 ms**. La partenza del conteggio è automaticamente preceduta dall'azzeramento (che può anche essere ottenuto manualmente premendo il pulsante 'reset').

Si utilizzerà la **slitta con due magnetini sottili** (senza velcro). L'**elettromagnete**, posto all'estremità sinistra della guida, ha il compito di rilasciare la slitta imprimendole un **impulso minimo e riproducibile**, ciò si ottiene tenendo premuto il pulsante collegato all'elettromagnete.

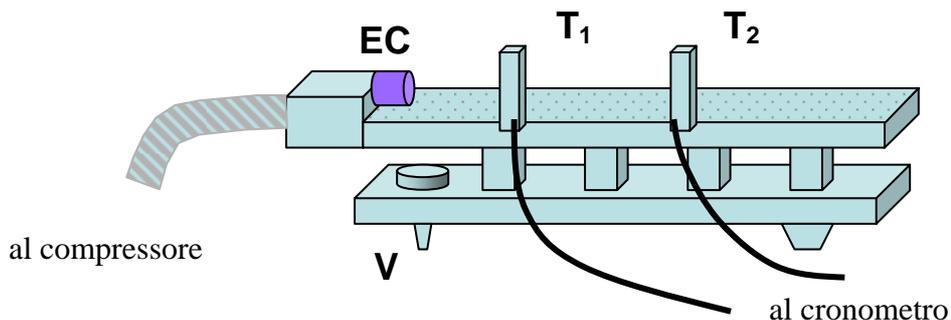


Fig. 1

3. Operazioni sperimentali e presa dati.

a) Si accende il compressore, regolandone la portata corrispondente alla posizione 2,5 o 3 della manopola. E' opportuno **non modificare la posizione della manopola** durante l'intera procedura di presa dati.

b) Si definisce approssimativamente la **posizione di orizzontalità** della guidovia ponendo su di essa la slitta in posizione centrale e ruotando la vite micrometrica finchè la slitta, lasciata libera di scorrere, rimane in quiete. A questo punto si sblocca la ghiera alla base della vite micrometrica (mediante una piccola vite laterale) e la si ruota in modo che lo spigolo dell'asticella corrisponda alla tacca di riferimento sulla vite micrometrica.

c) **Scelta dell'inclinazione.** Si ruoti ora la vite micrometrica di un certo numero intero di giri, ad es. 6.

d) Si **posizionano i traguardi** ad una distanza di circa 30 cm, con l'unico accorgimento che la prima fotocellula non deve essere troppo vicina all'elettromagnete. Si verifica che quando la slitta passa in corrispondenza dei traguardi muovendosi verso destra si ottenga l' inizio e la fine del conteggio. Se dovesse accadere il contrario, controllare che il commutatore 'start-stop' sia sulla posizione 'start'.

e) Portare la slitta all'estremità sinistra della guida, in modo che il magnetino aderisca all'elettromagnete fisso. Tenendo premuto il pulsante, si otterrà il rilascio della slitta. Ripetere alcune volte la procedura e verificar che i tempi di transito sono circa uguali.

Si inizia quindi la presa dati; si suggerisce di ripetere la misura almeno 200 volte. Allo scopo di evitare errori sistematici, si faccia attenzione a:

- non urtare il tavolo o la guidovia;
- non toccare la vite di livellamento;
- non variare la portata del compressore;
- non premere il pulsante durante il conteggio.

4. Analisi dei dati.

Un esempio di dati (simulati) è riportato in tabella alla fine. I 200 valori di tempo sono elencati nelle colonne gialle. Innanzitutto, si calcola il **valore medio** $\langle t \rangle$ delle N misure:

$$\langle t \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N t_j$$

e la **deviazione standard del campione**:

$$\sigma \equiv \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum (t_j - \langle t \rangle)^2}.$$

Le colonne bianche a destra dei dati, in tabella, rappresentano gli **scarti dalla media**: $z_k = t_k - \langle t \rangle$, che per i nostri scopi sono più convenienti da rappresentare.

Una prima valutazione qualitativa della coerenza interna dei dati può essere ottenuta costruendo l'**ideogramma** delle N misure o meglio dei loro scarti, ovvero i valori z_k in funzione del numero di misura k, come in **fig.2**. Le due linee orizzontali in questa figura corrispondono a $\pm \sigma$.

La rappresentazione più conveniente della distribuzione delle misure è costituita dall'**istogramma degli scarti** come in **fig. 3**, ovvero il numero di misure comprese negli intervalli (tutti uguali) in cui si è diviso l'asse Δz . Per costruire l'istogramma bisogna scegliere un valore opportuno dell'intervallo Δz . Per questo si consiglia la metà della deviazione standard, eventualmente arrotondata per comodità:

$$\Delta z \cong \sigma / 2$$

La convenienza di questa scelta si può apprezzare dal fatto che, per una distribuzione gaussiana, la teoria prevede che il 99 % dei valori degli scarti dalla media siano compresi in un intervallo di

ampiezza 3σ centrato intorno allo zero. Si ottiene così una distribuzione popolata da qualche decina di valori negli intervalli centrali.

Si passa quindi alla verifica che la distribuzione ottenuta segua approssimativamente la legge normale degli errori casuali, sovrapponendo all'istogramma sperimentale la curva gaussiana.

La densità di probabilità gaussiana è esprimibile come

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

dove \bar{x} è il valore medio e σ la deviazione standard. Passando agli scarti z la distribuzione è centrata intorno allo zero.

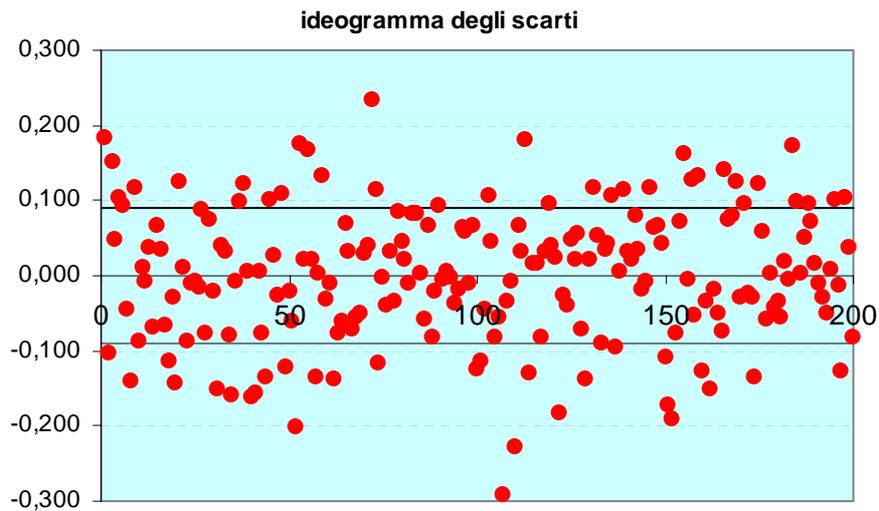


Fig. 2 Ideogramma relativo ad una serie di 200 misure dei tempi di percorrenza di un tratto prefissato della guidovia da parte di una slitta .

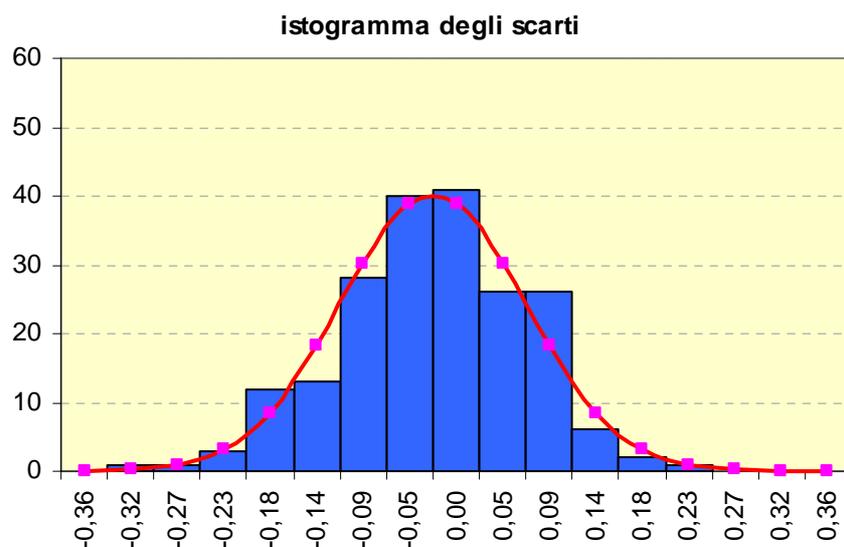


Fig. 3 Istogramma degli scarti dalla media per i dati relativi alla Fig. 2.

La gaussiana così scritta è normalizzata all'unità (l'area sottesa vale 1) e non è direttamente confrontabile con l'istogramma delle misure. L'area di un canale dell'istogramma in cui cadono n misure è $n\Delta z$; perciò, essendo Δz costante, l'area totale è:

$$\sum_i n_i \Delta z = \Delta z \sum_i n_i = N \cdot \Delta z$$

si dovrà moltiplicare la distribuzione gaussiana per questo fattore per poterla confrontare, ottenendo

$$f(z) = A \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{con} \quad A = \frac{N \cdot \Delta z}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

Si tratta allora di calcolare questa funzione per valori corrispondenti al centro di ogni singolo canale dell'istogramma.

La curva gaussiana così ottenuta è mostrata in **Fig. 3** sovrapposta all'istogramma. Notare che

La relazione dovrà contenere:

- l'inclinazione scelta per la guidovia e la posizione dei sensori di start e stop
- la tabella delle N misure, e i loro scarti
- il tempo medio e la sua deviazione standard
- l'ideogramma delle misure
- l'istogramma degli scarti con sovrapposta la distribuzione gaussian di confronto

a questo proposito, si riporteranno anche, esplicitamente

- il valore Δz dell'intervallo scelto per l'istogramma
- il valore della costante di normalizzazione A

t_k	Δt_k						
1,681	0,183	1,436	-0,062	1,385	-0,113	1,325	-0,173
1,396	-0,102	1,296	-0,202	1,454	-0,044	1,307	-0,191
1,649	0,151	1,673	0,175	1,604	0,106	1,422	-0,076
1,546	0,048	1,519	0,021	1,543	0,045	1,570	0,072
1,602	0,104	1,665	0,167	1,415	-0,083	1,661	0,163
1,590	0,092	1,519	0,021	1,443	-0,055	1,493	-0,005
1,453	-0,045	1,364	-0,134	1,206	-0,292	1,627	0,129
1,357	-0,141	1,501	0,003	1,464	-0,034	1,445	-0,053
1,616	0,118	1,630	0,132	1,490	-0,008	1,632	0,134
1,410	-0,088	1,466	-0,032	1,271	-0,227	1,370	-0,128
1,509	0,011	1,489	-0,009	1,564	0,066	1,463	-0,035
1,491	-0,007	1,360	-0,138	1,530	0,032	1,348	-0,150
1,536	0,038	1,422	-0,076	1,679	0,181	1,480	-0,018
1,430	-0,068	1,436	-0,062	1,367	-0,131	1,447	-0,051
1,565	0,067	1,567	0,069	1,513	0,015	1,423	-0,075
1,534	0,036	1,529	0,031	1,514	0,016	1,640	0,142
1,432	-0,066	1,426	-0,072	1,415	-0,083	1,573	0,075
1,384	-0,114	1,443	-0,055	1,529	0,031	1,579	0,081
1,470	-0,028	1,449	-0,049	1,595	0,097	1,624	0,126
1,354	-0,144	1,527	0,029	1,538	0,040	1,469	-0,029
1,622	0,124	1,539	0,041	1,523	0,025	1,593	0,095
1,508	0,010	1,731	0,233	1,316	-0,182	1,474	-0,024
1,412	-0,086	1,612	0,114	1,472	-0,026	1,469	-0,029
1,489	-0,009	1,381	-0,117	1,459	-0,039	1,363	-0,135
1,490	-0,008	1,495	-0,003	1,547	0,049	1,621	0,123
1,483	-0,015	1,459	-0,039	1,520	0,022	1,558	0,060
1,586	0,088	1,531	0,033	1,555	0,057	1,439	-0,059
1,422	-0,076	1,464	-0,034	1,428	-0,070	1,501	0,003
1,574	0,076	1,583	0,085	1,360	-0,138	1,457	-0,041
1,477	-0,021	1,544	0,046	1,519	0,021	1,463	-0,035
1,348	-0,150	1,520	0,022	1,615	0,117	1,443	-0,055
1,539	0,041	1,487	-0,011	1,551	0,053	1,516	0,018
1,530	0,032	1,581	0,083	1,408	-0,090	1,493	-0,005
1,419	-0,079	1,581	0,083	1,533	0,035	1,672	0,174
1,338	-0,160	1,501	0,003	1,542	0,044	1,596	0,098
1,491	-0,007	1,440	-0,058	1,604	0,106	1,500	0,002
1,597	0,099	1,565	0,067	1,404	-0,094	1,550	0,052
1,621	0,123	1,415	-0,083	1,503	0,005	1,594	0,096
1,503	0,005	1,478	-0,020	1,613	0,115	1,570	0,072
1,336	-0,162	1,591	0,093	1,531	0,033	1,515	0,017
1,343	-0,155	1,493	-0,005	1,520	0,022	1,487	-0,011
1,505	0,007	1,504	0,006	1,578	0,080	1,469	-0,029
1,422	-0,076	1,496	-0,002	1,533	0,035	1,449	-0,049
1,362	-0,136	1,461	-0,037	1,479	-0,019	1,507	0,009
1,599	0,101	1,481	-0,017	1,490	-0,008	1,598	0,100
1,526	0,028	1,563	0,065	1,614	0,116	1,486	-0,012
1,471	-0,027	1,558	0,060	1,561	0,063	1,370	-0,128
1,608	0,110	1,488	-0,010	1,564	0,066	1,602	0,104
1,375	-0,123	1,565	0,067	1,541	0,043	1,535	0,037
1,478	-0,020	1,374	-0,124	1,390	-0,108	1,417	-0,081

$\langle t \rangle$ 1,498
 σ 0,089