LABORATORIO DI FISICA per Scienze e Tecnologie per l'Ambiente.

ESPERIENZA N.1

Determinazione della distribuzione degli errori in una serie di misure ripetute della stessa grandezza fisica

1. Introduzione

Scopo dell' esperienza è verificare che gli errori casuali nella misura di una grandezza fisica, ripetuta molte volte nelle stesse condizioni sperimentali, seguono la **distribuzione normale di Gauss**.
La grandezza che si misura è l'accelerazione di una slitta che scivola su un piano inclinato con attrito trascurabile. Si ricaverà infine l'accelerazione di gravità, data l'inclinazione del piano e l'accelerazione misurata.

2. Descrizione dell' apparato sperimentale

L'apparato sperimentale è costituito da una "guidovia a cuscino d'aria" schematicamente rappresentata in **Fig.1**, allo scopo di realizzare un moto virtualmente in assenza di attrito; da un piccolo elettromagnete montato sulla sommità della guidovia e da un sensore di posizione ad ultrasuoni posizionato ad un estremo della guidovia. La guida è cosi' composta:

- un **tubo metallico** lungo circa 1.4 m a sezione rettangolare, sulla cui faccia superiore sono praticati numerosi forellini per la fuoriuscita dell'aria compressa; si forma così un cuscino d'aria sul quale una slitta opportunamente sagomata può scorrere con attrito radente trascurabile.

- un basamento metallico sul cui è montato il tubo, che puo' variare la sua inclinazione per mezzo di una **vite micrometrica V**. **Un giro della vite** corrisponde ad una variazione di inclinazione **$\delta\theta$=5'.**

-**un compressore d'aria**, a portata variabile, collegato ad un estremo della guida tramite un manicotto flessibile.

- L' elettromagnete, posto all'estremità sinistra della guida, serve a trattenere la slitta che può essere rilasciata, con impulso minimo, premendo il pulsante collegato all'elettromagnete (tenere premuto per almeno 1s). Si userà la **slitta munita di ago magnetico** con un disco di alluminio al centro.

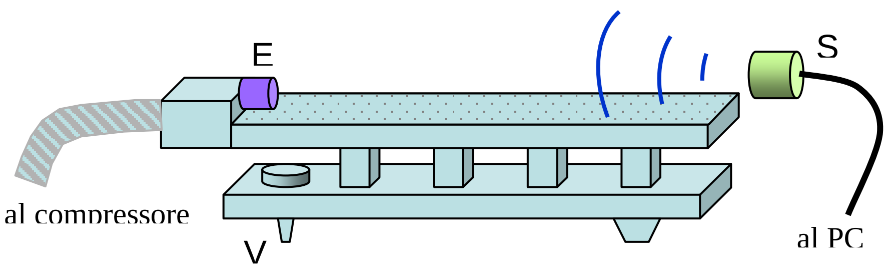

Figura 1. Schema dell'apparato sperimentale.

Il **sensore ad ultrasuoni** all'estremità destra rileva la posizione della slitta misurando il tempo fra l'emissione di un segnale sonoro e l'eco relativa. Il sensore genera un segnale elettrico analogico, che viene convertito in forma digitale da un opportuno modulo di conversione ed il segnale digitalizzato viene letto da un PC .
Il calcolatore sul quale è installato un programma dedicato, legge i dati, li elabora e produce sullo schermo, automaticamente, il grafico posizione-tempo. Da questo, mediante interpolazione., si ricava l'accelerazione, che è il dato che qui interessa.

3. Operazioni sperimentali e presa dati.

a) Si accende il compressore, regolandone la portata corrispondente alla posizione 2,5 o 3 della manopola. E' opportuno **non modificare la posizione della manopola** durante l'intera procedura di presa dati.

b) Si definisce approssimativamente la **posizione di orizzontalità** della guidovia ponendo su di essa la slitta in posizione centrale e ruotando la vite micrometrica finché la slitta, lasciata libera di scorrere, rimane in quiete. A questo punto si sblocca la ghiera alla base della vite micrometrica (mediante una vite laterale) e la si ruota in modo che lo spigolo dell'asticella corrisponda alla tacca di riferimento sulla vite micrometrica. Questa servirà come riferimento.

c) Scelta dell'inclinazione. Si ruoti la vite micrometrica di un certo numero intero di giri. Si consiglia di ruotare la vite di almeno 6 giri, e non più di 10.

e) Portare la slitta all'estremità sinistra della guida, in modo che il magnetino aderisca all'elettro-magnete fisso. Tenendo premuto il pulsante, per almeno 1 secondo, si otterrà il rilascio della slitta.

f) in corrispondenza si fa partire l'acquisizione (START) "cliccando" sul pulsante verde in alto a destra sullo schermo:  E' opportuno eseguire alcune misure di prova per sincronizzare lo start dell'acquisizione ed il rilascio della slitta, tenendo presente che esiste un certo ritardo fra lo start e l'inizio vero e proprio della presa dati.
In base a queste prove si sceglierà un opportuno tempo di acquisizione, in modo da visualizzare l'intero percorso della slitta, ma non molto di più, per non perdere tempo inutilmente.

In queste prime prove si deve anche definire l'interpolazione dei punti misurati, che fornisce l'accelerazione

g) Per prima cosa si seleziona un intervallo nel grafico X(t): questo dovrà essere lungo **almeno 1s,** ed iniziare **almeno 0,5 s** dopo l'inizio del moto. La selezione si fa con il cursore, tenendo premuto il "mouse".

g') Ora bisogna dire al programma come interpolare i dati. Selezionando il pulsante  in alto a destra, si aprirà un menu con una scelta delle funzioni interpolanti: si sceglierà la parabola "QUADRATIC", ovvero $At^2 + Bt + C$.
Controllare che l'interpolazione sia in modalità "**automatica**". Quindi verificarne la bontà con "**Try fit**": la curva interpolante (nera) deve riprodurre i dati (curva rossa) nell'intervallo di tempo prescelto. Se tutto è a posto dare OK.
Da questo momento, ogni volta che si esegue una nuova acquisizione si troverà sullo schermo la curva x(t) con l'interpolazione, i cui parametri A, B, C, sono riportati in un riquadro sullo schermo. Per i nostri scopi, basta registrare il valore di A, senza errore. Ad ogni modo, controllare che la qualità del fit sia buona, altrimenti la misura va scartata.

Inizia a questo punto la presa dati vera e propria. Si suggerisce di ripetere la misura circa 200 volte (una misura richiede circa 15 s).

Allo scopo di evitare errori sistematici, si faccia attenzione a:
- non urtare il tavolo o la guidovia;
- non toccare la vite di livellamento;
- non variare la portata del compressore;
- non premere il pulsante durante il conteggio.

4. Analisi dei dati.

Un esempio di dati (simulati) è riportato in tabella alla fine. I valori A_K (parametro ottenuto dal fit, k=1 ... 200 nel nostro esempio), sono moltiplicati per 2 per ottenere l'accelerazione a_K, Si calcola il **valore medio <*a*>** delle N misure:

$$< a > \equiv \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} a_j$$

(si può usare la funzione MEDIA(....) di Excel) e la **deviazione standard del campione**:

$$\sigma \equiv \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum (a_j - < a >)^2}$$

(che si può ottenere dalla funzione DEV.ST(...) di Excel). Le colonne bianche a destra dei dati, in tabella, rappresentano gli **scarti dalla media**: $z_k = a_k - \langle a \rangle$, più convenienti da rappresentare.

Una prima valutazione qualitativa della coerenza interna dei dati può essere ottenuta costruendo l'**ideogramma** delle N misure o meglio dei loro scarti, ovvero i valori z_k in funzione del numero di misura k, come in **Fig.2**. Le due linee orizzontali in questa figura corrispondono a $\pm\sigma$.

La rappresentazione più conveniente della distribuzione delle misure è costituita dall'**istogramma degli scarti** (**Fig. 3)**, ovvero il numero di misure comprese negli intervalli (tutti uguali) in cui si è diviso l'asse Δz. Per costruire l'istogramma bisogna scegliere un valore opportuno dell'intervallo Δz. Per questo si consiglia la metà della deviazione standard, eventualmente arrotondata per comodità:

$$\Delta z \cong \sigma / 2$$

La convenienza di questa scelta si può apprezzare dal fatto che, per una distribuzione gaussiana, la teoria prevede che il 99 % dei valori degli scarti dalla media siano compresi in un intervallo di ampiezza 3 σ centrato intorno allo zero. Si ottiene così una distribuzione popolata da qualche decina di valori negli intervalli centrali.

Si passa quindi a verificare se la distribuzione ottenuta segue la legge normale degli errori casuali, sovrapponendo all'istogramma sperimentale la curva gaussiana opportunamente normalizzata con la stessa deviazione standard dei dati. Come si può vedere nella formula matematica, la densità di probabilità gaussiana è caratterizzata da 2 parametri:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \qquad \mathbf{1}$$

dove $\bar{x}$ è il valore medio e definisce il centro della curva (per definizione zero nel caso degli scarti) mentre σ è la deviazione standard, che determina la larghezza della distribuzione.

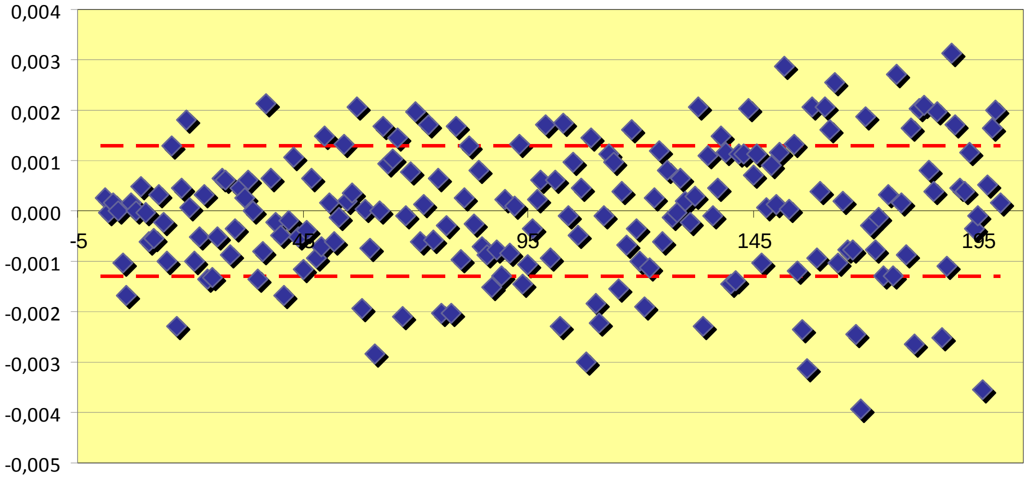

Figura 2 Ideogramma relativo agli scarti di 200 misure dell'accelerazione. Le linee tratteggiate corrispondono a $\pm\sigma$.

Questa distribuzione è normalizzata all'unità (l'area sottesa vale 1) e non è direttamente confrontabile con l'istogramma delle misure. Infatti, l'area di un canale dell'istogramma in cui cadono n_i misure è $n_i\Delta z$; e sommando tutti i canali (con Δz costante) l'area dell'istogramma sarà:

$$\sum_i n_i \Delta z = \Delta z \sum_i n_i = N \cdot \Delta z$$

Per poter confrontare la gaussiana (**1**) con l'istogramma, si dovrà quindi moltiplicare la prima per il fattore **NΔz**. La curva gaussiana così moltiplicata è mostrata in **Fig. 3** sovrapposta all'istogramma. Si vede ad occhio che:

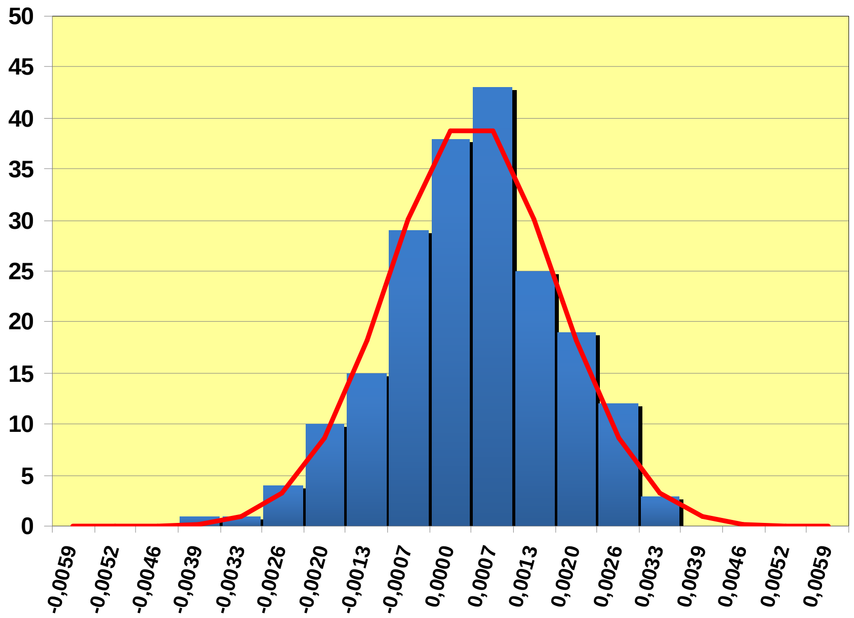

Figura 3. Istogramma degli scarti dalla media dei dati relativi alla Fig. 2. La curva rappresenta la distribuzione gaussiana con lo stesso valore medio (zero) e deviazione standard dei dati. .

1. il centroide della gaussiana e dell'istogramma coincidono
2. si vede ad occhio che l'area sottesa dalla gaussiana è simile a quella dell'istogramma
Salvo il caso in cui i dati sperimentali non seguono una distribuzione gasussiana (può succedere, per varie ragioni) i due punti qui menzionati forniscono una semplice verifica che si sono fatte le cose correttamente. Il punto 2 però resta valido anche nel caso di distribuzione non gaussiana.

Completata questa parte, resta un ultimo aspetto della relazione, cioè il calcolo dell'accelerazione di gravità a partire dall'accelerazione misurata. Sappiamo che in assenza di attrito il moto su un piano inclinato avviene con accelerazione costante $a = g \sin\theta$ essendo θ l'inclinazione rispetto all'orizzontale. Ciò consente di stimare $g = \langle a \rangle / \sin\theta$. Notare che si utilizza il valore medio in quanto "migliore stima" dell'accelerazione. Con i dati dell'esempio si ottiene $g = 8{,}38\ m/s^2$ ben al di sotto del valore noto.

La relazione dovrà contenere:

- l'inclinazione scelta per la guidovia (numero di giri) e la posizione dei sensori di start e stop
- la tabella delle N misure A_k, le accelerazioni a_k e i loro scarti
- l'accelerazione media e la sua deviazione standard
- l'ideogramma delle misure
- l'istogramma degli scarti con sovrapposta la distribuzione gaussiana di confronto
- il calcolo di g con relativo errore.

a questo proposito, si riporteranno anche, esplicitamente

- il valore Δz dell'intervallo scelto per l'istogramma
- il valore della costante di normalizzazione A

4.2. Stima di *g* a partire dai dati misurati.

Può essere istruttivo calcolare l'accelerazione di gravità, in base alla formula $a = g \sin\theta$, ovvero $g = a / \sin\theta$ dove naturalmente si userà l'accelerazione media. In generale si troveranno valori molto diversi da quello noto; nel nostro esempio si trova **8,38 m/s^2**. Ciò non è dovuto all'incertezza sull'accelerazione media, veramente piccola, bensì all'incertezza sull'angolo e per aver trascurato l'attrito residuo o meglio la resistenza dell'aria. Si calcoli separatamente il contributo all'errore Δg dovuto all'incertezza su $\langle a \rangle$ e sull'angolo. Nel primo caso si ha

$\sigma_{\langle a \rangle} = \sigma_a / \sqrt{N} \cong 0{,}00009\,\mathrm{m/s^2}$ (nel .nostro esempio) mentre per l'errore sull'angolo si può assumere $\Delta\theta \cong 0{,}00036\ \mathrm{rad}$, equivalenti ad 1/4 di giro della vite di regolazione.

$$\left(\frac{\Delta g}{g}\right)_a = \frac{\sigma_{\langle a \rangle}}{\langle a \rangle} \equiv 0{,}0013 \quad \text{(incertezza dello 0,13\%)}$$

$$\left(\frac{\Delta g}{g}\right)_\theta = \frac{\cos\theta \cdot \Delta\theta}{\sin\theta} \cong \frac{\Delta\theta}{\theta} = 0{,}042 \quad \text{(incertezza del 4,2\%)}$$

Il risultato è un'incertezza complessiva del 4,2%, ovvero un errore **Δg=0,35 m/s^2**. Anche tenendo conto di questo errore il risultato non è compatibile con il valore noto. Ciò può voler dire che il contributo della resistenza dell'aria era grande, oppure che chi ha fatto la misura (nell'A.A. 2009/2010) ha sbagliato angolo, ad esempio avevano fatto 5 giri di vite anziché 6.

Appendice.

Consigli per costruire l'istogramma e la gaussiana in EXCEL.

Nell'esempio qui discusso si suppone di aver misurato il parametro "A", e di rappresentare gli scarti dalla media dell'accelerazione $a = 2A$, cioè la variabile $z_K = a_K - \langle a \rangle$

- Riportare le N misure (tipicamente 200) in una colonna EXCEL. Supponiamo, per fissare le idee, che siano nella colonna B, dalla casella B3 alla B202 (cioè nell'intervallo B3:B202). Nella colonna A si è riportato il numero di misura corrispondente.
- valore per valore calcolare l'accelerazione a, qui nell'intervallo C3:C202. Ciò si ottiene in EXCEL scrivendo nella casella C3 l'espressione "=B3*2" e "trascinando" la casella con il mouse fino alla casella C202 (prendere l'angolino in basso a destra della casella per trascinarla)..
- calcolare la media e la deviazione standard delle accelerazioni. Ciò ottiene in EXCEL con le funzioni MEDIA(C3:C202) e DEV.ST(C3:C202). Cioè scrivendo, ad es. nella casella C204 "= MEDIA(C3:C202)" e analogamente per la deviazione standard. Non è necessario scrivere queste formule a mano: basta scrivere nella casella selezionata il segno "=", quindi selezionare la funzione desiderata nel menu funzioni (premere " ˅ " a fianco di "Σ" sulla barra degli strumenti) e selezionare con il mouse le caselle da considerare
- infine calcolare una colonna degli scarti, ad es. la colonna D, da D3 a D202. Il modo più semplice è scrivere nella casella D3 "=C3 - C211" e trascinando la casella fino alla D202. Il $ fa sì che la casella B211 rimanga invariata nel trascinamento.

Ora ci sono tutti gli elementi per disegnare l'ideogramma come in fig.2. Per l'istogramma è necessario definire una serie di intervalli di larghezza opportuna Δz, e trovare il numero di misure che cade in ognuno di questi intervalli.

- Scegliere un valore opportuno Δz di larghezza degli intervalli, all'incirca la metà della deviazione standard (nell'esempio di fig. 4 il valore Δz (nella casella I30) è definito proprio come "=C205/2"
- costruire una colonna degli intervalli, ad es. da -10Δz a +10Δz, ciò si può fare preparando dapprima una colonna di interi da -10 a +10, nell'esempio H35:H55, e a fianco (I35:I55) la colonna degli intervalli [Basta scrivere in I35 " =H35*I30" e trascinare la casella fino a I55.

- Ora abbiamo la "matrice dei dati" (D3**:**D202) e la "matrice delle classi" (I36:I54), con cui calcolare il numero di eventi nei diversi intervalli. Il modo più semplice è utilizzare la funzione FREQUENZA di EXCEL.
- Nella casella J36 selezionare la funzione FREQUENZA(matrice_dati; matrice_classi), ovvero scrivere "=FREQUENZA(D3:D202;I36:I55)". Per usare la funzione come "matrice" bisogna a questo punto
  - con il mouse, selezionare le caselle da J36 a J55 (una in più rispetto alle classi). **Nota**: qui non si deve "trascinare" la funzione ma solo selezionare le caselle)
  - premere il tasto F2
  - premere contemporaneamente Ctr - Shift - Enter
- Ora ci sono dati per l'istogramma. Come "tipo di grafico" si sceglie "istogramma" e come dati l'intervallo J36:J54 (le "etichette" in ascissa saranno I36:I54).

Bisogna ora costruire una gaussiana da confrontare con i dati. A questo scopo

- calcolare i valori medi degli intervalli, ad es. definendo in L36 "=(J36+J35)/2" e trascinando la casella fino a L54.
- definire la casella J11 =(I10+I11)/2 e trascinare fino alla casella J21. Il motivo è che i valori della gaussiana vanno calcolati "al centro" degli intervalli di cui H11:H21 sono gli estremi
- Definire in casella K21 "=DISTRIB.NORM(J21; media; dev.std; 0)*N*Δz". Dove "media"=0 se stiamo considerando gli scarti, "dev.std" può essere copiata manualmente o inserire la casella in cui si trova il valore della dev.standard (nel nostro esempio B212, col $ per i motivi spiegati sopra). N è il numero di misure (200 nel nostro esempio), e N*Δz sarà ad es. I31.
- Inserire la curva gaussiana nel grafico, selezionando "tipo di grafico" "linee". Nell'esempio di Fig.4 i dati utilizzati per l'istogramma e per la gaussiana sono quelli in grassetto.

	A	B	C	D
1				
2		A_k	a_k	z_K
3	1	0,03671	0,07342	0,000257
4	2	0,03657	0,07314	-0,000023
5	3	0,03666	0,07332	0,000157
6	4	0,03658	0,07316	-0,000003
7	5	0,03607	0,07214	-0,001023
		....		
		....		
198	196	0,03481	0,06962	-0,003543
199	197	0,03684	0,07368	0,000517
200	198	0,0374	0,07480	0,001637
201	199	0,03758	0,07516	0,001997
202	200	0,03667	0,07334	0,000177
203				
204		<a>	0,07316	
205		σa	0,00130	

	H	I	J	K	L	M
29						
30	Δz	0,00065				
31	$N*\Delta z$	0,130175				
32						
33						
34		Intervalli	frequenza		val.medi	gaussiana
35	-10	-0,0065				
36	-9	**-0,0059**	**0**		-0,0062	**0,0005**
37	-8	**-0,0052**	**0**		-0,0055	**0,0048**
38	-7	**-0,0046**	**0**		-0,0049	**0,0353**
39	-6	**-0,0039**	**1**		-0,0042	**0,2029**
40	-5	**-0,0033**	**1**		-0,0036	**0,9094**
41	-4	**-0,0026**	**4**		-0,0029	**3,1740**
42	-3	**-0,0020**	**10**		-0,0023	**8,6277**
43	-2	**-0,0013**	**15**		-0,0016	**18,2649**
44	-1	**-0,0007**	**29**		-0,0010	**30,1137**
45	0	**0,0000**	**38**		-0,0003	**38,6668**
46	1	**0,0007**	**43**		0,0003	**38,6668**
47	2	**0,0013**	**25**		0,0010	**30,1137**
48	3	**0,0020**	**19**		0,0016	**18,2649**
49	4	**0,0026**	**12**		0,0023	**8,6277**
50	5	**0,0033**	**3**		0,0029	**3,1740**
51	6	**0,0039**	**0**		0,0036	**0,9094**
52	7	**0,0046**	**0**		0,0042	**0,2029**
53	8	**0,0052**	**0**		0,0049	**0,0353**
54	9	**0,0059**	**0**		0,0055	**0,0048**
55	10	0,0065	0			

Figura 4. Esempi di foglio EXCEL con i calcoli relativi all'esperienza della gaussiana (v. appendice).