LABORATORIO DI FISICA per Scienze e Tecnologie per l'Ambiente. AA 2011/2012

ESPERIENZA N.1

Determinazione della distribuzione degli errori in una serie di misure ripetute della stessa grandezza fisica

1. Introduzione

Scopo dell' esperienza è verificare che gli errori casuali nella misura di una grandezza fisica ripetuta molte volte nelle stesse condizioni sperimentali seguono la distribuzione normale o di Gauss.
Nell' esperienza proposta, la grandezza da misurare è l' intervallo di tempo impiegato da una slitta che scivola su un piano inclinato con attrito trascurabile, per percorrere una distanza prefissata.

2. Descrizione dell' apparato sperimentale

L'apparato sperimentale è costituito da una "guidovia a cuscino d'aria" schematicamente rap-presentata in **Fig.1**, il cui scopo è di realizzare un moto virtualmente senza attrito della "slitta", da un piccolo elettromagnete (EC) montato alla sommità della guidovia e da un cronometro elettronico collegato a due traguardi fotoelettrici anch' essi fissati sulla guidovia. Questa è così composta:

- un **tubo metallico** lungo all'incirca 1.4 m a **sezione rettangolare**, sulla cui faccia superiore sono praticati numerosi forellini per la fuoriuscita dell'aria compressa; il tubo costituisce il piano sul quale si forma , al passaggio di una slitta opportunamente sagomata, un cuscino d'aria in modo che la slitta stessa possa scorrere con attrito radente trascurabile.

- un basamento metallico sul quale il tubo è montato, che per mezzo di una **vite micrometricaV** può variare la sua inclinazione rispetto al banco di lavoro, approssimativamente orizzontale. **Un giro della vite** corrisponde ad una variazione di inclinazione **$\delta\theta$=5'.**

- **un compressore d'aria**, a portata variabile, collegato ad un estremo della guida tramite un manicotto flessibile.

I **due traguardi fotoelettrici** T_1 e T_2 sono collocati a fianco della guida e possono essere fissati in diverse posizioni lungo una scala millimetrata solidale col basamento. Essi sono collegati ad un cronometro elettronico; l'elemento fotosensibile emette un impulso elettrico al passaggio della slitta, senza che con essa vi sia contatto materiale.

Il **cronometro elettronico**, per il quale i segnali dai due traguardi funzionano rispettivamente da 'start' e 'stop' per la misura del tempo; nella **scala "10K"** il cronometro misura i tempi con sensibilità pari a **0.1 ms** . La partenza del conteggio è automaticamente preceduta dall'azzeramento (che può anche essere ottenuto manualmente premendo il pulsante 'reset').
Si utilizzerà la **slitta con due magnetini sottili** (senza velcro). **L' elettromagnete**, posto all'estremità sinistra della guida, ha il compito di rilasciare la slitta imprimendole un **impulso minimo e riproducibile,** ciò si ottiene tenendo premuto il pulsante collegato all'elettromagnete.

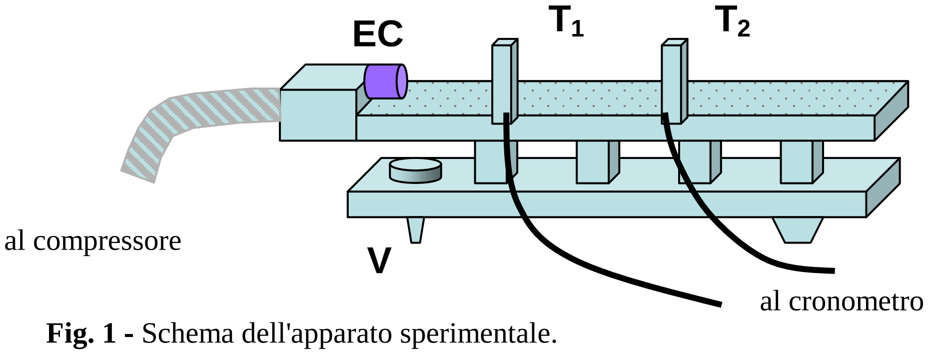

Fig. 1 - Schema dell'apparato sperimentale.

3. Operazioni sperimentali e presa dati.

a. Si accende il compressore, regolandone la portata corrispondente alla posizione 2,5 o 3 della manopola. E' opportuno **non modificare la posizione della manopola** durante l'intera procedura di presa dati.

b. Si definisce approssimativamente la **posizione di orizzontalità** della guidovia ponendo su di essa la slitta in posizione centrale e ruotando la vite micrometrica finché la slitta, lasciata libera di scorrere, rimane in quiete. A questo punto si sblocca la **ghiera** alla base della vite micrometrica (mediante una piccola vite laterale) e la si ruota in modo che lo spigolo dell'asticella corrisponda alla tacca di riferimento sulla vite micrometrica.

c. **Scelta dell'inclinazione**. Si ruoti ora la vite micrometrica di un certo numero intero di giri. Si consiglia un numero compreso fra 4 e 10.

d. Si **posizionano i traguardi** ad una distanza di circa 30 cm, con l'unico accorgimento che la prima fotocellula non deve essere troppo vicina all'elettromagnete. Si verifica che quando la slitta passa in corrispondenza dei traguardi muovendosi verso destra si ottenga l'inizio e la fine del conteggio. Se dovesse accadere il contrario, controllare che il commutatore 'start-stop' sia sulla posizione 'start"

e. Portare la slitta all'estremità sinistra della guida, in modo che il magnetino aderisca all'elettromagnete fisso. Tenendo premuto il pulsante, si otterrà il rilascio della slitta. Ripetere alcune volte la procedura e verificar che i tempi di transito sono circa uguali.

Si inizia quindi la presa dati; si suggerisce di ripetere la misura almeno 200 volte. Allo scopo di evitare errori sistematici, si faccia attenzione a:

- non urtare il tavolo o la guidovia;
- non toccare la vite di livellamento;
- non variare la portata del compressore;
- non premere il pulsante durante il conteggio.

4. Analisi dei dati.

Un esempio di dati (simulati) è riportato in tabella alla fine. I 200 valori di tempo sono elencati nelle colonne gialle. Innanzitutto, si calcola il **valore medio <t>** delle N misure:

$$<t>\equiv \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} t_j$$

e la **deviazione standard del campione**: $\sigma \equiv \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum (t_j - <t>)^2}$.

Le colonne bianche a destra dei dati, in tabella, rappresentano gli **scarti dalla media**: $z_k = t_k - \langle t \rangle$, che per i nostri scopi sono più convenienti da rappresentare.

Una prima valutazione qualitativa della coerenza interna dei dati può essere ottenuta costruendo l'**ideogramma** delle N misure o meglio dei loro scarti, ovvero i valori z_k in funzione del numero di misura k, come in **fig. 2**. Le due linee orizzontali in questa figura corrispondono a $\pm\sigma$.

Questa rappresentazione può mettere in evidenza cambiamenti intervenuti durante la misura (ad es. movimenti meccanici, deriva dell'elettronica ...) che possono influenzare il risultato.

La rappresentazione più importante della distribuzione delle misure è costituita dall'**istogramma degli scarti** (**fig. 3**) ovvero il numero di misure comprese negli intervalli (tutti uguali) in cui si è diviso l'asse Δz. Per costruire l'istogramma bisogna scegliere un valore opportuno dell'intervallo Δz. Per questo si prenda la metà della deviazione standard, eventualmente arrotondata per comodità: $\Delta z \cong \sigma / 2$.

La convenienza di questa scelta si può apprezzare dal fatto che, per una distribuzione gaussiana, la teoria prevede che il 99 % dei valori degli scarti dalla media siano compresi in un intervallo di

ampiezza $\pm 3\sigma$ intorno allo zero. Si ottiene così una distribuzione con qualche decina di conteggi negli intervalli centrali.
Si passa quindi a verificare se la distribuzione ottenuta approssimativamente la legge normale degli errori casuali, sia in modo grafico che in modo quantitativa. Graficamente, si sovrappone all'istogramma sperimentale la curva gaussiana. La densità di probabilità gaussiana è esprimibile come

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

dove $\bar{x}$ è il valore medio e σ la deviazione standard. Se si usano gli scarti z la distribuzione è centrata intorno allo zero.

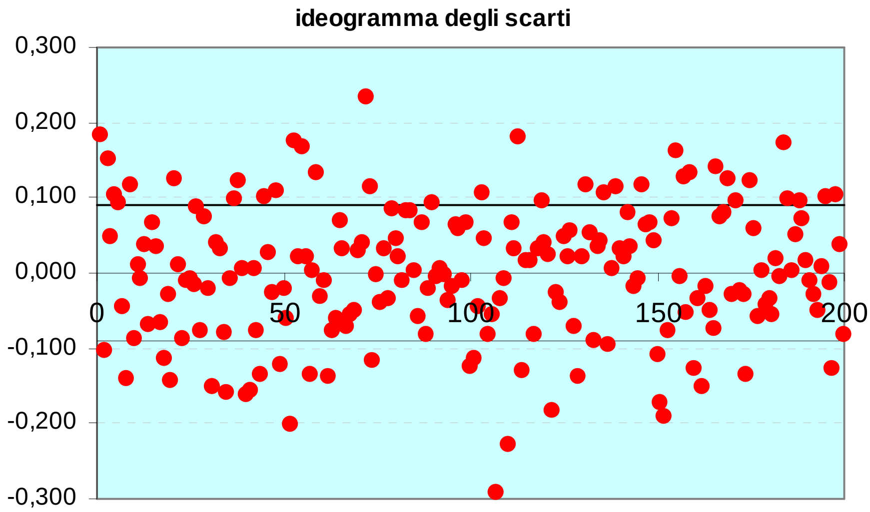

Fig. 2 Ideogramma relativo ad una serie di 200 misure dei tempi di percorrenza di un tratto prefissato della guidovia da parte di una slitta .

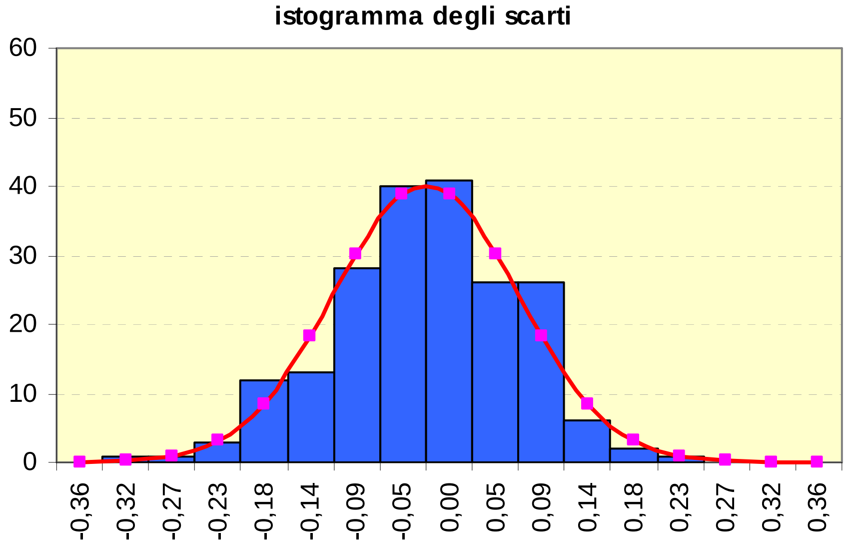

Fig. 3 Istogramma degli scarti dalla media per i dati relativi alla Fig. 2.

La gaussiana così scritta è normalizzata all'unità (l'area sottesa vale 1) e non è direttamente confrontabile con l'istogramma delle misure. L'area di un canale dell'istogramma in cui cadono *n* misure è $n\Delta z$; perciò, essendo Δz costante, l'area totale è:

$$\sum_i n_i \Delta z = \Delta z \sum_i n_i = N \cdot \Delta z$$

si dovrà moltiplicare la distribuzione gaussiana per questo fattore per poterla confrontare, ottenendo

$$f(z) = A \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{con} \quad A = \frac{N \cdot \Delta z}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

Si tratta allora di calcolare questa funzione per valori corrispondenti al centro di ogni singolo canale dell'istogramma.
La curva gaussiana così ottenuta è mostrata in **Fig. 3** sovrapposta all'istogramma. E' opportuno che i punti della curva siano calcolati al centro dei vari intervalli, altrimenti nel grafico ottenuto con EXCEL curva e istogramma risultano "sfasati".

Per un confronto numerico della distribuzione sperimentale con la distribuzione normale, che uno si aspetta, si procederà al calcolo del "**chi-quadro**" (χ^2), dato dalla formula:

$$\chi^2 = \sum_K \frac{(N_K - G_K)^2}{N_K}$$

dove N_K è il conteggio sperimentale nell'intervallo k-esimo e G_K il valore della gaussiana al centro dell'intervallo. Per questa somma si considerino 10-11 intervalli centrali e, se in uno di questi intervalli non ci sono conteggi, si consideri il denominatore pari a 1. Conviene dividere il Chi-quadro per il numero di punti (10 o 11): orientativamente, se il valore ottenuto risulta minore di 2 possiamo dire che la nostra distribuzione è in buon accordo con una distribuzione gaussiana, entro le incertezze statistiche; se il valore è maggiore di 10 la distribuzione non è compatibile con una gaussiana.

La relazione dovrà contenere:

- titolo, nomi degli autori e breve introduzione (scopo della misura e strumenti a disposizione)
- il numero del tavolo;
- l'inclinazione scelta per la guidovia e la posizione dei sensori di start e stop
- la tabella delle N misure, e i loro scarti
- il tempo medio e la sua deviazione standard
- l'ideogramma delle misure
- l'istogramma degli scarti con sovrapposta la distribuzione gaussian di confronto
- il calcolo del chi-quadro
- breve commento finale se opportuno (ad es. la distribuzione ottenuta è effettivamente normale? L'ideogramma evidenza problemi nel corso della misura? ...)

si riporteranno anche, esplicitamente

- il valore Δz dell'intervallo scelto per l'istogramma
- il valore della costante di normalizzazione della gaussiana

La relazione dovrebbe essere **un documento Word**, o equivalente, comprensivo di tabelle e figure, e può essere inviata per posta elettronica.

Appendice.

Consigli per costruire l'istogramma e la gaussiana in EXCEL.

Supponiamo di aver effettuato N misure di tempo (t_K , con k=1...N) , di cui si è calcolata la media $\langle t \rangle$, la deviazione standard σ gli scarti dalla media $z_K = t_K - \langle t \rangle$.

- Riportare le N misure (tipicamente 200) in una colonna EXCEL. Supponiamo, per fissare le idee, che siano nella colonna B, dalla casella B3 alla B202 (cioè nell'intervallo B3:B202). Nella colonna A si è riportato il numero progressivo corrispondente.
- calcolare la media e la deviazione standard delle misure. Ciò ottiene in EXCEL con le funzioni MEDIA(C3:C202) e DEV.ST(C3:C202). Cioè scrivendo, ad es. nella casella B205 "= MEDIA(C3:C202)" e analogamente per la deviazione standard. Non è necessario scrivere queste formule a mano: basta scrivere nella casella selezionata il segno "=", quindi selezionare la funzione desiderata nel menu funzioni (premere " ˅ " a fianco di "Σ" sulla barra degli strumenti) e selezionare con il mouse le caselle da considerare;
- calcolare gli scarti, ad es. nella colonna C, da C3 a C202. Il modo più semplice è scrivere nella casella C3 "=B3 - B205" e trascinando la casella fino alla C202. Nel trascinamento il riferimento B3 viene aggiornato a B4, B5 ... mentre il $ garantisce che il riferimento alla casella B205 (media) non viene modificato.

Ora ci sono tutti gli elementi per disegnare l'**ideogramma** come in fig.2. Conviene usare la modalità Dispers(X,Y), quindi selezionare Serie, Aggiungi, scegliendo come valori X il numero progressivo di misura e come Y gli scarti. Per cambiare il formato dei dati sul grafico (ad es. eliminare la linea che li congiunge, cambiare forma e colore ...) "cliccare" su un punto qualsiasi con il pulsante destro del mouse e selezionare "Formato serie di dati".
Per inserire le linee corrispondenti a +/- 1 deviazione standard, creare una tabella come la seguente, dove la 2^a colonna corrisponde a +σ, la 3^a a −σ:

0	0,096	-0,096
200	0,096	-0,096

Aggiungere questi dati in tabella selezionando Aggiungi come in precedenza.

Per costruire l'**istogramma** è necessario definire una serie di intervalli di larghezza opportuna Δz, e trovare il numero di misure che cade in ognuno di questi intervalli.

- Scegliere un valore opportuno Δz di larghezza degli intervalli, per esempio la metà della deviazione standard (nell'esempio di fig. 4 il valore Δz (nella casella J1) è definito proprio come "=B205/2"
- costruire una colonna degli intervalli, ad es. da -10Δz a +10Δz, ciò si può fare preparando dapprima una colonna di interi da -11 a +10, nell'esempio H4:H25, e a fianco (I4:I25) la colonna degli intervalli [Basta scrivere in I4 " =H4*J1" e trascinare la casella fino a I25.
- Ora abbiamo la "matrice dei dati" (D3:D202) e la "matrice delle classi" (I4:I25), con cui calcolare il numero di eventi nei diversi intervalli (classi). Il modo più semplice è utilizzare la funzione FREQUENZA di EXCEL.
- Nella casella J5 selezionare la funzione FREQUENZA(matrice_dati; matrice_classi), ovvero scrivere "=FREQUENZA(D3:D202;I4:I25)". Per usare la funzione in modalità "matrice" bisogna a questo punto
  - con il mouse, selezionare le caselle da J5 a J25. **Nota**: qui non si deve "trascinare" la funzione ma solo selezionare le caselle)
  - premere il tasto F2
  - premere contemporaneamente Ctr - Shift - Enter.
- Ora ci sono dati per l'istogramma. Come "tipo di grafico" si sceglie "istogramma" e come dati l'intervallo J5:J25 (le "etichette" in ascissa saranno L5:L25, i cui valori sono la media fra il valore corrispondente e quello precedente nella colonna I, ovvero si scriva in L5: "=(I5+I4)/2"

e si trascini fino a L25. Questo perché nella casella J5 la funzione frequenza mette il numero di valori che cadono fra I4 e I5 ecc.

Bisogna ora calcolare la distribuzione normale o gaussiana da confrontare con i dati. Essa sarà calcolata nei punti L4:L25.

- Definire in casella K5 "=DISTRIB.NORM(J21; media; dev.std; 0)*N*Δz". Dove "media"=0 se stiamo considerando gli scarti, "dev.std" può essere copiata manualmente o inserire il riferimento alla casella in cui si trova il valore (nel nostro esempio B212, col $ per i motivi spiegati sopra). N è il numero di misure (200 nel nostro esempio), e Δz sarà J1. Si moltiplica per N*Dz per far sì che la distribuzione normale (per sè di area unitaria) abbia la stessa area dell'istogramma.

Per fare la figura selezionare la modalità "Istogramma" quindi Serie, Aggiungi. **Attenzione**: in questa modalità non si inseriscono i valori X,Y, ma solo i valori Y (Valori: nell'esempio M5:M25) mentre in ascissa il programma assume numeri successivi a partire da 1. Per mettere le "etichette" giuste inserire i valori L5:L25 [Etichette asse categorie (X)]. Il risultato sono due istogrammi; per tracciare una linea "cliccare" sul secondo istogramma (gaussiana) col pulsante destro del mouse, selezionare "Tipo di grafico" e quindi Linee. Per questioni di stile (colore e spessore della linea, eventuale eliminazione dei punti ecc.) cliccare su uno dei punti (o sulla linea) e selezionare "Formato serie di dati".

k	t_K	z_K
1	1,686	0,189
2	1,521	0,024
3	1,314	-0,183
4	1,654	0,157
5	1,575	0,078

.
.
.
.
.

197	1,583	0,08
198	1,428	-0,08
199	1,391	-0,11
200	1,501	0,00

$\langle t \rangle$ 1,505

σ 0,089

Fig. 4. Tabella delle misure, corrispondente per ipotesi alle colonne B, C, D.

	Δz	0,0464					
		Istogr.		z.centr.	gauss.	Nk - Gk	
-11	-0,495						
-10	-0,464	0		-0,479	0,00		
-9	-0,417	0		-0,441	0,00		
-8	-0,371	0		-0,394	0,00		
-7	-0,325	0		-0,348	0,04		
-6	-0,278	1		-0,301	0,20		
-5	-0,232	1		-0,255	0,91	-0,09	0,0082
-4	-0,186	5		-0,209	3,17	-1,83	0,6669

-3	-0,139	9		-0,162	8,63	-0,37	0,0154
-2	-0,093	12		-0,116	18,26	6,26	3,2708
-1	-0,046	32		-0,070	30,11	-1,89	0,1112
0	0,000	38		-0,023	38,67	0,67	0,0117
1	0,046	43		0,023	38,67	-4,33	0,4367
2	0,093	26		0,070	30,11	4,11	0,6509
3	0,139	19		0,116	18,26	-0,74	0,0284
4	0,186	10		0,162	8,63	-1,37	0,1883
5	0,232	3		0,209	3,17	0,17	0,0101
6	0,278	1		0,255	0,91		
7	0,325	0		0,301	0,20		
8	0,371	0		0,348	0,04		
9	0,417	0		0,394	0,00		
10	0,464	0		0,441	0,00		
						X^2 /11	0,49

Fig. 5. Tabella utilizzata per costruire l'istogramma, con la curva della distribuzione normale. Per ipotesi le colonne sono H - O, e le righe vanno da 1 a 27. Le ultime due colonne corrispondono al calcolo del "chi-quadro".

Resta da calcolare il **chi-quadro**, che ci serve come stima di quanto bene (o male) la distribuzione sperimentale approssima la distribuzione normale. Utilizziamo soltanto gli intervalli centrali, nell'esempio da -5Δz a +5Δz (11 valori). La colonna N (Nk - Gk) rappresenta le differenze fra valori dell'istogramma e quelli della gaussiana: l'elemento N10 corrisponde a "=M10-J10" e analogamente gli altri. La casella O10 corrisponde invece a "=N10^2/J10" e la casella O27 corrisponde alla somma di questi valori diviso 11 (numero di punti sommati): "=somma(O10:O20)".
Senza entrare in ulteriori dettagli, possiamo considerare buono l'accordo se questo valore è minore di 1, accettabile se è dell'ordine delle unità, dubbio se dell'ordine delle decine o più (nell'esempio l'accordo è buono).