Misura della viscosità relativa di un liquido con il viscosimetro di Ostwald

La misura della portata nello scorrimento forzato di un fluido lungo uno o più capillari è il principio di base di alcuni importanti tipi di viscosimetri. Tra questi il viscosimetro di Ostwald, che sfrutta il gradiente di pressione dovuto alla gravità per produrre lo scorrimento del fluido, è adatto in particolare per i liquidi "newtoniani" (liquidi la cui viscosità non dipende dalla velocità).
Il dispositivo è illustrato in fig.1. Entro un grosso contenitore pieno d'acqua a temperatura costante (termostato) è posto verticalmente un capillare LL che è parte di uno dei rami di un tubo ad U. All'imboccatura superiore del capillare c'è un rigonfiamento delimitato da due incisioni, che determina il volume di liquido del quale si misurerano i tempi di scorrimento lungo il capillare.

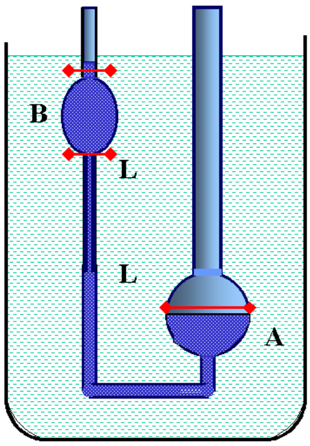

Figura 1. Rappresentazione schematica del viscosimetro di Ostwald.

Il rapporto ℓ/r tra lunghezza e raggio del capillare deve essere molto elevato (> 100) se si vuole minimizzare l'errore dovuto alla discontinuità dell'imboccatura.
In base alla legge di Poiseuille, detta ΔP_x la differenza di pressione e tenendo conto che la resistenza del condotto al moto del fluido è dovuta essenzialmente al capillare (per cui $R_x = \frac{8\eta_x \ell}{\pi r^4}$ dove η_x è la viscosità del fluido, ℓ ed r lunghezza e raggio del capillare), si ottiene la portata

$$Q_x = \frac{\Delta P_x}{R_x} = \frac{\Delta P_x \pi r^4}{8\eta_x \ell} \qquad \textbf{1}.$$

D'altro canto, $Q_x = \frac{\Delta V}{\Delta t_x}$ e $\Delta P_x = \rho_x g h$, dove h è il dislivello medio del liquido nei due rami durante lo svuotamento; sostituendo nella 1 si ha

$$\frac{\Delta V}{\Delta t_x} = \frac{\rho_x g h \pi r^4}{8\eta_x \ell} \qquad \textbf{2}.$$

che, in linea di principio, si può risolvere per η_x .
Per ottenere η_x, oltre a misurare Δt_x, come si è detto, occorre misurare la densità ρ_x e si deve conoscere il valore esatto di g, del volume ΔV della bolla B, del raggio r e della lunghezza del capillare. Poiché la conoscenza accurata di tutte queste grandezze e in particolare del raggio r è molto difficile (inoltre r potrebbe non essere costante lungo il capillare), alla misura assoluta è preferibile una misura relativa con un liquido

di riferimento del quale sia nota con sufficiente accuratezza la viscosità (di solito acqua distillata). Infatti nel rapporto η_x/η_0 che dà la misura relativa, tutte le caratteristiche geometriche, identiche per entrambi i liquidi, si elidono. Prendendo il rapporto fra l'eq. 2 e l'analoga per η_0 si ottiene

$$\frac{\eta_x}{\eta_0} = \frac{\rho_x \Delta t_x}{\rho_0 \Delta t_0} \qquad \textbf{3a}.$$

ovvero

$$\eta_x = \rho_x \left(\frac{\eta_0}{\rho_0} \right) \frac{\Delta t_x}{\Delta t_0} \qquad \textbf{3b}.$$

dove Δt_0 e Δt_X sono i tempi di svuotamento del volume ΔV tra le due incisioni, rispettivamente per l'acqua e per il liquido incognito.
Osserviamo che il dislivello fra i due rami si semplifica solo se è lo stesso nelle due fasi dell'esperienza. Sarà cura dello studente **fare in modo che il livello coincida per i due liquidi**.
La **3** è stata ricavata nell'ipotesi di un dislivello *h* costante. Poiché questo varia mentre il liquido scende, durante lo scorrimento c'è una progressiva diminuzione della portata. Si può però dimostrare che la **3a** e **3b** restano valide anche tenendo conto di queste complicazioni. Ciò almeno per fluidi newtoniani mentre per altri fluidi l'uso del viscosimetro a caduta non è raccomandabile.
Viscosità e densità dell'acqua si ricavano dai valori tabulati in funzione della temperatura. Più esattamente, ci serve il rapporto η_0 / ρ_0 (detto anche viscosità cinematica); per temperature fra 15 e 25 °C, questo rapporto è riprodotto dalle formula seguente, in funzione della temperatura T (°C), entro lo 0,3 per mille:

$$\frac{\eta_0}{\rho_0}\left(m^2/s\right) = \left(1,689 - 0,043785 \cdot T + 0,0004835 \cdot T^2\right) \cdot 10^{-3} \qquad \textbf{4.}$$

La temperatura si misurerà all'inizio e alla fine dell'esperienza: se la temperatura finale differisce da quella iniziale si utilizzerà la media fra i due valori.
La densità della miscela è fornita come dato: $\rho_X = (1,0130 \pm 0,0005)\text{g/cm}^3$

Procedimento e discussione

Misura dei tempi di efflusso.

Per ricavare la viscosità incognita non resta che misurare i tempi di efflusso Δt_X e Δt_0. A tal fine

- **a.** Si carica il viscosimetro con acqua distillata. Un'incisione nel ramo più largo del tubo ad U (linea A in figura) consente di **dosare in modo uguale i due liquidi**.
- **b.** Si immerge il tubo nel termostato e **si lascia stabilizzare la temperatura** (aspettare qualche minuto) quindi,
- **c.** con una pompetta (*in pressione* e non in aspirazione) si fa salire il liquido fin oltre il rigonfiamento. L'operazione esige una certa cautela e va **eseguita lentamente per evitare il formarsi di bollicine** d'aria all'interno del capillare.
- **d.** Allontanata rapidamente la pompetta, con un cronometro si misurano gli intervalli di tempo al passaggio del liquido in corrispondenza delle due incisioni. Si ripete la misura **una ventina di volte**.

Fatto questo, si lava e si asciuga accuratamente il viscosimetro (in particolare, fare **attenzione che il capillare sia ben pulito**) e si ripetono le identiche operazioni per la miscela di acqua e glicerina.

	Acqua	miscela
	26,92	29,95
	26,91	30,12
	27,32	30,09
	26,96	29,96
	27,21	30,13
	26,98	29,97
	26,95	29,93
	27,07	30,12
	27,10	30,09
	26,92	29,89
media	27,03	30,03
dev.std	0,14	0,09
dev.st.media	0,044	0,029

Tab. 1. Esempio di tempi di efflusso misurati.

Di ogni serie di misure si calcola il valore medio e la deviazione standard, che rappresenta l'errore probabile della misura. Nell'esempio in tabella la temperatura misurata era stata di 21°C sia all'inizio che alla fine dell'esperienza e la viscosità dell'acqua era $0{,}9810 \cdot 10^{-3}$ Pa s (v. Tab. 2). Dalla **3b** si ricava:

$$\eta_x = 1{,}106.10^{-3}\ \text{Pa·s}$$

Propagazione degli errori.

Per quanto riguarda le misure di tempo, adotteremo quale errore la deviazione standard della media.

Altre fonti di incertezza sono l'errore sulla densità della miscela ($\delta\rho_X$) e l'errore sulla temperatura (δT). L'errore sulla temperatura influenza il risultato tramite il rapporto η_0/ρ_0 che è funzione di T. L'errore su ν_0 vale $\delta(\eta_0/\rho_0) = \left|\frac{d(\eta_0/\rho_0)}{dT}\right|\delta T$, dove si può adottare orientativamente il valore δT=0,25 °C, mentre la derivata si calcola a partire dalla **4**. L'errore relativo sulla viscosità η_X vale:

$$\frac{\delta\eta_x}{\eta_x} \cong \sqrt{\left[\left(\frac{\sigma_{tX}}{\Delta t_x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{t0}}{\Delta t_0}\right)^2 + \left(\frac{\delta(\eta_0/\rho_0)}{(\eta_0/\rho_0)}\right)^2 + \left(\frac{\delta\rho_X}{\rho_X}\right)^2\right]} \qquad \textbf{5.}$$

Può essere interessante analizzare il contributo dei singoli fattori:

$$\frac{\sigma_{t0}}{\Delta t_0} = 0{,}00163, \quad \frac{\sigma_{tX}}{\Delta t_X} = 0{,}00097, \quad \frac{\delta\rho_X}{\rho_X} = 0{,}00049, \quad \frac{\delta(\eta_0/\rho_0)}{(\eta_0/\rho_0)} = 0{,}00597.$$

dove, per i tempi, si sono utilizzate le deviazioni standard della media. E' interessante che la principale fonte di errore è l'ultima, dovuta all'errore sulla temperatura.
Risulta quindi

$$\eta_x = (1{,}106 \pm 0{,}009)10^{-3}\,\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}$$

T (°C)	ρ_0 (kg/m^3)	η_0(Pas)$\cdot$ 1000	$\eta_0/\rho_0 \cdot$ 1000
15	999,126	1,1404	1,1414
16	998,970	1,1111	1,1122
17	998,801	1,0828	1,0841
18	998,622	1,0559	1,0574
19	998,432	1,0299	1,0315
20	998,230	1,0050	1,0068
21	998,019	0,9810	0,9829
22	997,797	0,9579	0,9600
23	997,565	0,9358	0,9381
24	997,323	0,9142	0,9167
25	997,071	0,8937	0,8963

Tab. 2. Densità e viscosità dell'acqua distillata fra 15°C e 25°C. Nell'ultima colonna c'è il rapporto η_0/ρ_0.

Nota. Le sensibilità $\delta\rho_X$ e δT rappresentano *errori massimi*. In questo caso abbiamo propagato l'errore massimo come se fosse un errore statistico, volendo essere "conservativi".
Per quanto riguarda l'errore sui tempi, la deviazione standard della media potrebbe sottostimare l'errore reale, a causa del piccolo numero di misure. Si può decidere di utilizzare la deviazione standard del campione (non della media), purché sia specificato nella relazione.