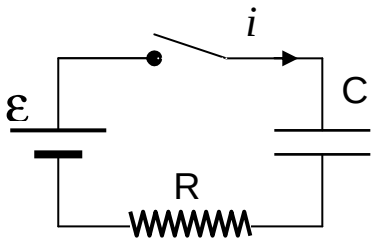
Misura del tempo caratteristico di un circuito RC in serie.

Lo scopo dell'esperienza è verificare la legge di carica e scarica di un condensatore, misurarne il tempo caratteristico nella fase di scarica e confrontare questo valore con quello atteso teoricamente.

A. Carica di un condensatore.



Si consideri il circuito in figura, formato da un generatore ideale di forza elettromotrice $\mathcal{E} = V_0$, un condensatore di capacità C ed una resistenza R. Inizialmente l'interruttore è aperto e il condensatore scarico. Alla chiusura dell'interruttore il condensatore si carica fino a raggiungere una ddp fra le armature $\Delta V = V_0$, quando la carica sulle armature vale $Q_0 = CV_0$.

La corrente elettrica carica positivamente un'armatura lasciando sull'altra una carica opposta (è il "punto di vista" convenzionale, in realtà il flusso di elettroni accumula carica negativa su un'armatura, lasciando una carica positiva sull'altra). La legge temporale con cui avviene questo processo si può ricavare applicando le leggi fondamentali dei circuiti:

legge di Kirchoff delle maglie: $\mathcal{E} - \Delta V_C - \Delta V_R = 0$

seconda legge di Ohm: $\Delta V_R = Ri$

definizione di capacità: $\Delta V_C = Q/C$

a cui si aggiunge la relazione fra corrente e variazione della carica Q del condensatore: $dQ = idt$ (la carica trasportata dalla corrente incrementa il valore di Q).

Sostituendo nella legge di Kirchoff si ottiene $i = -\frac{Q}{RC} + \frac{\mathcal{E}}{R}$ ovvero $\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{\tau} + Q_0$ da cui

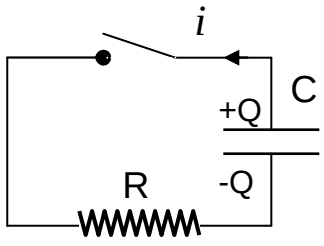
$$Q(t) = Q_0\left[1 - \exp(-t/\tau)\right]$$

questa è la soluzione che soddisfa la condizione iniziale (Q(0)=0). Dividendo per C si ottiene

$$\Delta V_C(t) = V_0\left[1 - \exp(-t/\tau)\right]$$

τ=RC ha le dimensioni di un tempo ed ha il significato di tempo caratteristico. Dopo un tempo τ dalla chiusura del circuito ΔV_C ha raggiunto il 63% del suo valore asintotico V_0. Ed anche se il valore asintotico V_0 è raggiunto in principio solo per $t \to \infty$, dopo un tempo 3τ ha già raggiunto il 95% di questo valore, e dopo 5τ siamo al 99%. A questo punto, nella pratica, la carica del condensatore si considera completa.

B. Scarica del condensatore.



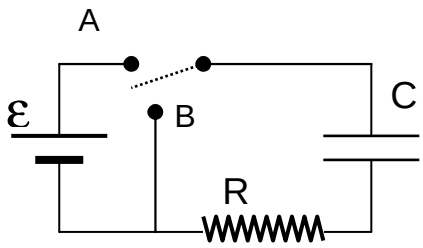
Si consideri il circuito in figura, costituito da un condensatore inizialmente carico, con carica Q_0 e ddp fra le armature $\Delta V_C = V_0$, l'interruttore è aperto. Alla chiusura dell'interruttore la ddp ai capi della resistenza produce una corrente elettrica che finisce per scaricare il condensatore, Con gli stessi ragionamenti di prima , salvo il fatto che ora $dQ = -idt$ (la carica trasportata dalla corrente è sottratta all'armatura positiva). Si giunge all'equazione

$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{\tau}$ che ha soluzione

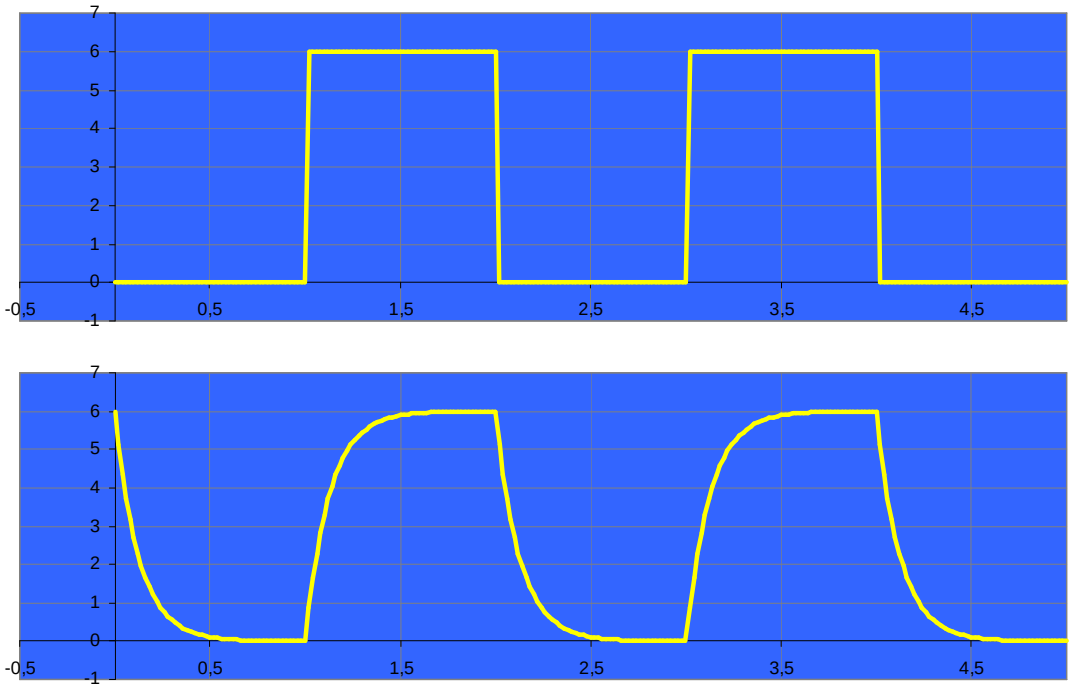
$$Q(t) = Q_0 \exp(-t/\tau) \quad \text{ovvero} \quad \Delta V_C(t) = V_0 \exp(-t/\tau)$$

Questa è la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $Q(0)=Q_0$.

Misura in laboratorio. Carica e scarica del condensatore si possono ottenere mediante un circuito come quello in figura, che consente di passare da una configurazione all'altra commutando l'interruttore fra A e B. Più semplicemente, nell'esperienza di laboratorio, le fasi di carica e scarica sono simulate mediante un generatore di onde quadre. Alla fase positiva dell'onda quadra corrisponde la fase di carica del condensatore, a quella negativa la fase di scarica.



Nella figura seguente, l'onda quadra rappresenta il segnale in uscita dal generatore, mentre la curva in basso rappresenta le serie di cariche e scariche corrispondenti, in scala arbitraria.



Per questa esperienza si dispone di

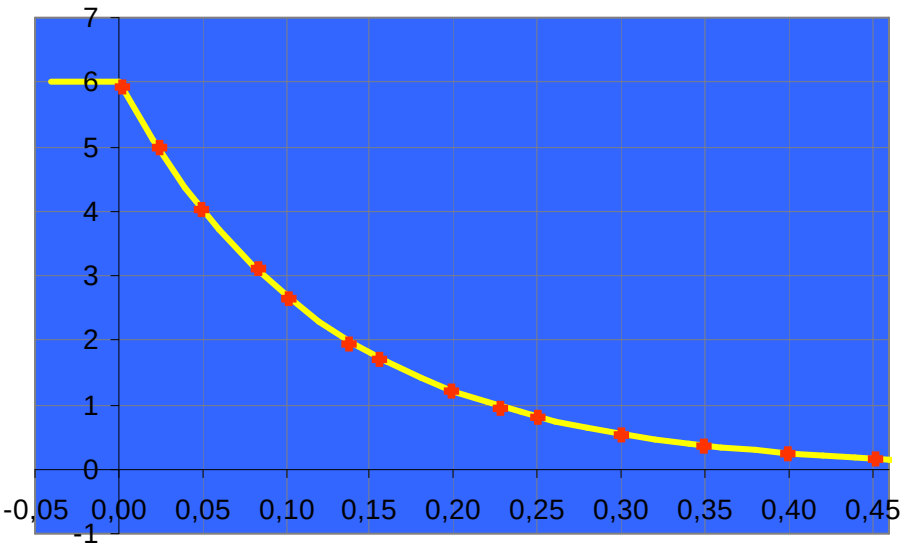
- un generatore d'onda quadra
- un oscilloscopio per visualizzare il segnale
- una cassetta con resistenze e condensatori
- cavi coassiali da connettere all'uscita del generatore e agli ingressi dell'oscilloscopio
- cavi con spinotti alle estremità per costruire il circuito

Operazioni da svolgere – dati da prendere durante l'esperienza

1. Annotare il numero del banco (è scritto sul generatore, l'oscilloscopio e la cassetta)
2. Costruire il circuito e annotare i valori di resistenza e capacità utilizzati (R_3 e C_3).
3. Impostare un'ampiezza opportuna sul generatore ed una scala adeguata sull'oscilloscopio. Annotare l'ampiezza impostata sul generatore e la scala scelta sull'oscilloscopio (Volts/div), la stessa sui canali 1 e 2.
4. Scegliere una frequenza opportuna, in funzione dei valori di resistenza e capacità utilizzati. Usando R_3 e C_3, la frequenza sarà dell'ordine di qualche centinaio di Hertz. Annotare la frequenza impostata e la scala dei tempi selezionata (sec/div) sull'oscilloscopio. Fare attenzione all'unità di misura (msec o μsec). In realtà è opportuno lavorare con una scala dei tempi ingrandita (portare la levetta superiore su MAG e selezionare un valore di ingrandimento con la levetta inferiore (x5, x10 o x50). In questo caso si deve annotare anche

il valore del fattore di ingrandimento (MAG). La scala effettiva sarà quella selezionata con la manopola (sec/div) **divisa** per il fattore MAG.

5. Misurare una serie di valori (t, V) della **curva di scarica**.



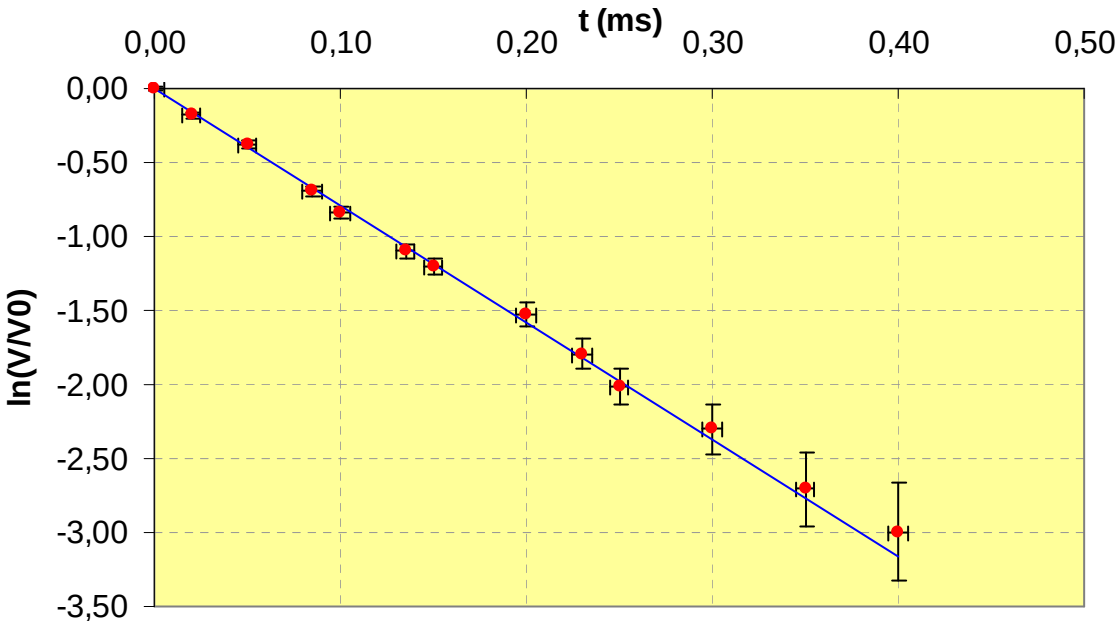
Per questa misura è opportuno scegliere le scale in modo che la curva copra l'intero schermo (sono le scale di cui si parla nei punti 3 e 4). E' anche necessario fissare lo "zero", sia dei tempi che delle ampiezze. Per i tempi si scelga una linea verticale alla sinistra dello schermo come "zero dei tempi" e si sposti la traccia in modo che la scarica inizi proprio per t=0. Per le tensioni si disponga la traccia in modo che il suo valore minimo asintotico coincida con una delle linee orizzontali nella parte bassa dello schermo. Conviene prendere i punti nei quali la traccia interseca una delle linee verticali o orizzontali sullo schermo, cercando di stimare ad occhio il valore dell'altra coordinata, usando le suddivisioni fini sullo schermo (5 per quadretto). L'errore dovrebbe essere all'incirca di 1/2 tacca (1/10 di quadretto) sia in verticale (volt) che in orizzontale (tempi).

Si costruisca una tabella delle misure, come la seguente (dati fittizi):

T(quad)	T(ms)	δT(ms)	V(quad)	V(V)	δV(V)	ln(V/V$_0$)	δ(ln)	τ_k	$\delta\tau_k$	$1/(\delta\tau_k)^2$	$\tau_k/(\delta\tau_k)^2$
0,0	0,00	0,005	6,0	6,0	0,1	0,00	0,017	--	--	--	--
0,4	0,02	0,005	5,0	5,0	0,1	-0,18	0,020	0,110	0,039	6,4E+02	7,0E+01
1,0	0,05	0,005	4,1	4,1	0,1	-0,38	0,024	0,131	0,022	2,2E+03	2,8E+02
1,7	0,09	0,005	3,0	3,0	0,1	-0,69	0,033	0,123	0,013	5,8E+03	7,1E+02
2,0	0,10	0,005	2,6	2,6	0,1	-0,84	0,038	0,120	0,011	7,6E+03	9,1E+02
2,7	0,14	0,005	2,0	2,0	0,1	-1,10	0,050	0,123	0,010	9,7E+03	1,2E+03
3,0	0,15	0,005	1,8	1,8	0,1	-1,20	0,056	0,125	0,010	1,0E+04	1,3E+03
4,0	0,20	0,005	1,3	1,3	0,1	-1,53	0,077	0,131	0,010	1,0E+04	1,3E+03
4,6	0,23	0,005	1,0	1,0	0,1	-1,79	0,100	0,128	0,010	1,0E+04	1,3E+03
5,0	0,25	0,005	0,8	0,8	0,1	-2,01	0,125	0,124	0,010	9,7E+03	1,2E+03
6,0	0,30	0,005	0,6	0,6	0,1	-2,30	0,167	0,130	0,012	7,4E+03	9,7E+02
7,0	0,35	0,005	0,4	0,4	0,1	-2,71	0,250	0,129	0,014	5,3E+03	6,8E+02
8,0	0,40	0,005	0,3	0,3	0,1	-3,00	0,333	0,134	0,017	3,7E+03	4,9E+02

Sono riportati valori di tempo (T) e tensione (V) in quadretti e in unità standard. Gli errori δT e δV sono posti uguali ad un decimo dell'unità di misura, come spiegato. Si calcola il **logaritmo naturale** del rapporto (V/V_0) e lo si riporta in grafico in funzione del tempo: se i punti hanno un andamento

esponenziale il logaritmo avrà un andamento rettilineo $\left[\frac{V}{V_0}=\exp(-\frac{t}{\tau}) \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)=-\left(\frac{1}{\tau}\right)t\right]$. in particolare i punti dovrebbero disporsi su una retta che passa per l'origine.



Entro gli errori sperimentali, il grafico conferma l'andamento esponenziale che ci si aspetta (si notino le barre d'errore sia in X che in Y). La pendenza della retta è (-1/τ) e permette di risalire al tempo caratteristico. Tuttavia, le formule del fit lineare che abbiamo visto non sono applicabili in quanto

- gli errori non sono affatto costanti
- gli errori nell'ascissa non sono trascurabili (per tempi piccoli è l'errore predominante)

Perciò si preferisce calcolare il tempo caratteristico con il metodo della **media pesata**.

Per ogni coppia di valori (T_k, V_k) si calcola il tempo caratteristico $\tau_K=-\frac{T_K}{\ln(V/V_0)}$ e l'errore ad esso associato ($\delta\tau_K$). Anziché una normale media aritmetica, nella media pesata i valori hanno un peso proporzionale a $1/\delta\tau_K^2$ (cioè inversamente proporzionale al quadrato dell'errore). Il valore medio pesato è dato da:

$$\langle\tau\rangle=\frac{\sum_K \frac{\tau_K}{\delta\tau_K^2}}{\sum_K \frac{1}{\delta\tau_K^2}} \qquad (1)$$

e il suo errore è

$$\delta\langle\tau\rangle=\sqrt{\frac{1}{\sum_K \frac{1}{\delta\tau_K^2}}} \qquad (2)$$

Si tratta quindi di calcolare gli errori $\delta\tau_K$.

L'errore sul logaritmo ($\ln(V/V_0)$) vale $\delta(\ln) = \frac{\delta V}{V}$ (si trascura l'errore su V_0, che viene trattato come una costante) e l'errore su τ_K: $\delta(\tau_K) = \tau_K \left(\left| \frac{\delta T}{T} \right| + \left| \frac{\delta \ln(..)}{\ln(..)} \right| \right)$.

Stiamo propagando l'errore massimo, perché gli errori sulle misure di V e T sono errori massimi. Notare che i termini fra parentesi compaiono in modulo, quindi i contributi si sommano sempre.

Per applicare la (1) si divide la somma dei termini dell'ultima colonna per la somma dei termini della penultima. L'errore (formula (2)) è invece la radice dell'inverso della somma della penultima colonna. Dalla tabella precedente si trova: $\langle \tau \rangle = (0{,}126 \pm 0{,}004)\text{ms}$. Con questo valore si è calcolata la retta interpolante rappresentata in figura.

Confronto del tempo caratteristico con il valore atteso.

Dalla teoria sappiamo che il tempo caratteristico è $\tau_T = RC$. Nel nostro caso i valori tabulati sono R_3=450Ω e C_3 = 250nF da cui si ricava τ=0,113 ms.

Anche il valore teorico è affetto da errore, a causa dell'errore sui valori di resistenza e capacità. Avendo utilizzato R_3 e C_3 una stima degli errori è:

$$\delta R = 7{,}5\Omega$$
$$\delta C = 10\text{nF}$$

Usando le note formule di propagazione dell'errore massimo

$\frac{\delta \tau_T}{\tau_T} = \left| \frac{\delta R}{R} \right| + \left| \frac{\delta C}{C} \right|$ da cui $\tau_T = (0{,}113 \pm 0{,}006)\text{ms}$

In questo caso, puramente indicativo, il valore misurato non è lontano da quello teorico, ma tenendo conto che gli errori quotati sono errori massimi, la differenza è significativa.

La ragione principale di questa differenza è la presenza di resistenze e capacità parassite, come la resistenza interna del generatore, la resistenza di ingresso dell'oscilloscopio, la capacità dei cavi coassiali ecc. Il termine correttivo più importante è la resistenza interna del generatore, R_G, di circa 50Ω. Tenendo conto di ciò, la resistenza da utilizzare per il calcolo della costante di tempo è R_3+R_G, in questo esempio pari a 500Ω. Si ottiene allora τ_T=0,125 ms, in ottimo accordo col valore misurato. Non conoscendo l'errore su R_G, non calcoliamo l'errore su questo valore.

Relazione.

La relazione dovrà contenere

- **a)** i valori menzionati nei punti 1-4 relativi alla misura
- **b)** la tabella dei valori misurati e delle quantità calcolate, con i loro errori, come nell'esempio
- **c)** Il valore ricavato per <τ> (media pesata) con il suo errore.
- **d)** Il grafico di $ln(V/V_0)$ vs. t come nell'esempio. Devono essere riportate le barre di errore, sia orizzontali (errori sul tempo) che verticali (errori su $ln(V/V_0)$).
- **e)** Nel grafico si riporti anche la retta, passante per l'origine, di pendenza pari a $-1/\langle \tau \rangle$ (dovrebbe essere in buon accordo con i dati, entro gli errori)
- **f)** calcolo della costante di tempo (o tempo caratteristico) teorico, con il relativo errore
- **g)** calcolo della costante di tempo corretta per la resistenza interna del generatore, senza errore.