Seconda esperienza di Fisica. Scienze e Tecnologie per l'Ambiente. A.A.2010

Misura dell'accelerazione di gravità con il pendolo reversibile di Kater.

1. Cenni di teoria. Il periodo delle piccole oscillazioni di un pendolo semplice non dipende dall'ampiezza ed è dato da $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$, dove ℓ è la lunghezza del pendolo. In principio, quindi, è possibile ricavare l'accelerazione di gravità g dalla misura del periodo di un pendolo semplice di lunghezza nota. Ma il pendolo semplice è solo un'utile approssimazione matematica e nella pratica è preferibile utilizzare un corpo rigido libero di ruotare senza attrito intorno ad un asse fisso orizzontale. Per motivi storici è chiamato "pendolo composto".

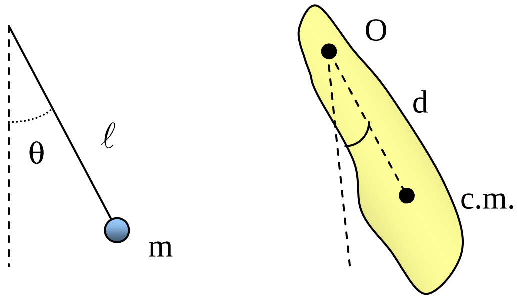

Fig. 1. Pendolo semplice (sx) e pendolo composto (dx).

Il periodo delle piccole oscillazioni del pendolo composto è $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$, dove d è la distanza del centro di massa dall'asse di oscillazione O, e I il momento d'inerzia del corpo rigido rispetto a questo asse. Spesso si scrive

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_{eff}}{g}}$$

dove $\ell_{eff} = \frac{I}{md}$ è una "lunghezza effettiva". Per misurare l'accelerazione di gravità con un pendolo composto è necessario conoscere ℓ_{eff} con buona precisione, per questo si usa il pendolo reversibile, **Fig. 2**.
Esso è costituito da un'asta metallica graduata che può essere sospesa mediante due coltelli O e O', ad essa solidali, la cui distanza OO'=h è nota con precisione. Fra un'estremità dell'asta ed il coltello più vicino si trova un disco massiccio, fisso, mentre un secondo disco massiccio può essere spostato fra i due coltelli.
Muovendo questo disco cambia la posizione del centro di gravità G e si modificano i momenti d'inerzia rispetto ad O e ad O'. Si dimostra che, quando il periodo di oscillazione intorno ad O è uguale a quello intorno ad O', la lunghezza effettiva del pendolo è proprio la distanza h fra i coltelli. E' su questo principio che funziona il pendolo reversibile.

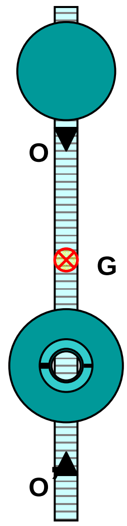

Fig. 2. Pendolo reversibile di Kater

La procedura sperimentale ha lo scopo di trovare la condizione per cui i periodi di oscillazione T (intorno ad O) e T' (intorno ad O') sono uguali e misurarne il valore. Ricordando che in tali condiizioni ℓ_{eff}=h (dato dello strumento) si potrà ricavare l'accelerazione di gravità.

2. Procedura sperimentale.

Per prima cosa si individuerà in modo grossolano la posizione del disco mobile per cui T=T'. A tal fine

- **a.** si fissa il disco mobile in posizione x=10cm
- **b.** si sospende il pendolo sul coltello O e si misura il tempo di 10 oscillazioni (Δt)
- **c.** si inverte il pendolo, sospendendolo al coltello O' e si misura il nuovo tempo ($\Delta t'$)
- **d.** si sposta in avanti il disco mobile di 10cm e si torna al punto **b**. Procedere fino a x=90cm.

Su carta millimetrata, fare un grafico di Δt e $\Delta t'$ in funzione della posizione x del disco mobile e stimare ad occhio la posizione x_1 per cui $\Delta t = \Delta t'$. Nella relazione il grafico va fatto per bene, naturalmente. Esso dovrebbe somigliare alla fig.3.

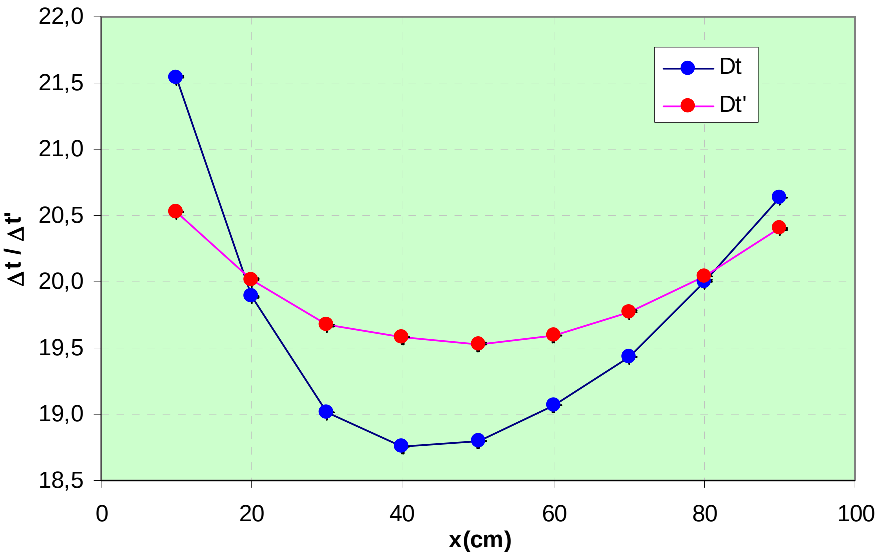

Fig. 3 - Tempo misurato per 10 oscillazioni intorno ai due punti di sospensione.

Come si vede, ci sono due punti di intersezione, ma ci si concentrerà sul primo ($x \approx 20\text{cm}$), dove è possibile una maggiore precisione. Nel caso in figura l'intersezione sembra essere intorno a x_0=19cm.

Perciò si eseguiranno misure più accurate intorno a questa posizione, in un intervallo di $\pm 4\text{cm}$, con passo di 1.0 cm. Misurare il tempo di almeno 20 oscillazioni:

- **e.** si fissa il disco mobile in posizione $x = x_0 - 4{,}0\text{cm}$ (nell'esempio x=15cm)
- **f.** si sospende il pendolo sul coltello O e si misura il tempo di 20 oscillazioni (Δt)
- **g.** si inverte il pendolo, sospendendolo al coltello O' e si misura il nuovo tempo ($\Delta t'$)
- **h.** si sposta il disco mobile di 1cm e si torna al punto b. Procedere finché $x = x_0 + 4{,}0\text{cm}$ (nell'esempio 23cm).

Fare un grafico dei nuovi punti (solo nella relazione) ed eseguire l'interpolazione lineare delle due serie <u>limitatamente a 5 punti intorno all'intersezione</u> (altrimenti l'approssimazione lineare potrebbe non essere appropriata; nell'esperienza sono stati misurati 9 punti per essere sicuri di "centrare" l'intersezione). Il risultato dovrebbe somigliare alla fig. 4.

Utilizzando i parametri delle due rette, calcolare il valore del periodo all'intersezione: nell'esempio risulta T_0=2,005065s (attenzione a non introdurre un errore utilizzando un numero di cifre troppo basso: in questo passaggio conviene usare 5 cifre decimali).

Per il calcolo dell'errore si sfrutterà la serie di 10 misure ripetute nelle stesse condizioni. La deviazione standard di queste misure (σ) si assume come dev. standard di ogni tempo misurato (indipendentemente dal numero di oscillazioni). Se si sono misurati i tempi di 20 oscillazioni, l'errore sul periodo (cioè 1 oscillazione) sarà pari a $\sigma/20$.

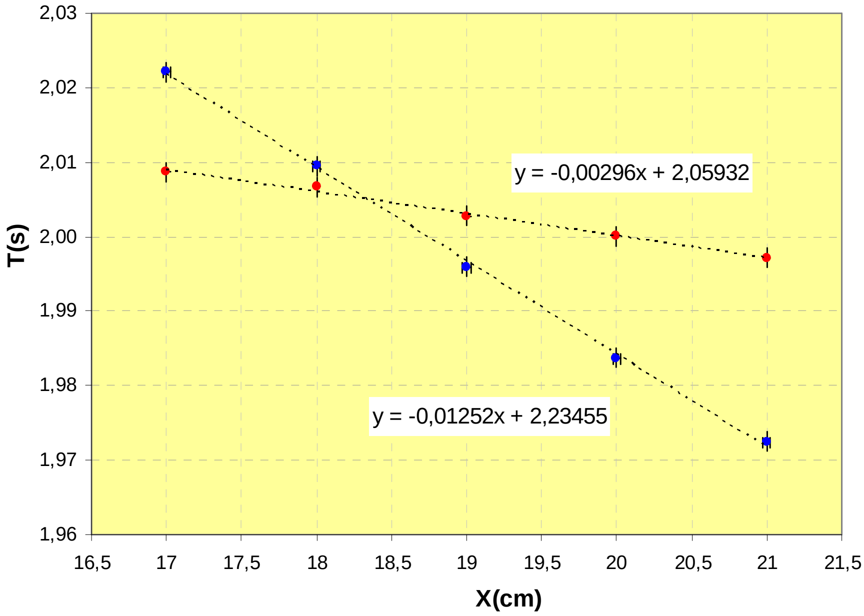

Fig. 4. Interpolazione lineare delle due serie di punti "accurati" (20 misure) nei dintorni del punto di intersezione.

Nei dati dell'esempio σ=0,026s e l'errore sul periodo (1 oscillazione) si assume σ_T=0,0013s.
Quanto vale l'errore sul periodo T_{INT} all'intersezione delle due rette? Un calcolo esatto sarebbe molto complicato; per gli scopi della relazione si può adottare il "metodo grafico", che di fatto comporta un errore simile anche sul periodo interpolato. Adottando il valore $T_{INT} = (2{,}0051 \pm 0{,}0013)s$ si ricava $g = 4\pi^2 \dfrac{h}{T_{INT}^2} = 9{,}771\,\mathrm{m/s^2}$.

Ora bisogna calcolare l'errore su g. Trascurando l'errore sulla posizione del disco mobile (purché sia stato posizionato con cura) restano 2 fonti di errore:

- l'errore σ_T sul periodo T_{INT}
- l'errore σ_h sulla lunghezza h (letto in tabella)

Il primo termine produce un errore relativo $\dfrac{\sigma_g}{g} = 2\dfrac{\sigma_T}{T_{INT}} = 0{,}0013$;

il secondo un errore relativo $\dfrac{\sigma_g}{g} = \dfrac{\sigma_h}{h} = 0{,}0004$.

I due contributi si sommano in quadratura: $\dfrac{\sigma_g}{g} = \sqrt{4\left(\dfrac{\sigma_T}{T_0}\right)^2 + \left(\dfrac{\sigma_h}{h}\right)^2} = 0{,}0014$.

In conclusione, nell'esempio considerato si trova $g = (9{,}771 \pm 0{,}014)\,\mathrm{m/s^2}$.

Il risultato è compatibile con il valore noto? Detto $g_0 = 9{,}8065\,\mathrm{m/s^2}$ il valore atteso per Padova, osserviamo che $\dfrac{|g - g_0|}{\sigma_g} \cong 2{,}7$: la discrepanza è inferiore a "3 *sigma*" e dunque non è proprio incompatibile, ma siamo al limite.

Qual è la ragione di questa discrepanza? Per rispondere correttamente bisognerebbe ripetere la misura con molta attenzione, ma una possibile spiegazione è che forse le oscillazioni non erano abbastanza piccole: si tratterebbe quindi di un errore sistematico.

Fino a 15-20° il periodo T si può descrivere con la formula $T(\theta) \cong T_0 \left(1 + \frac{\theta^2}{16}\right)$, dove T_0 è il periodo per angoli molto piccoli. La discrepanza fra il valore misurato e quello atteso si potrebbe spiegare ipotizzando un'ampiezza di oscillazione di 10°, valore non irragionevole.

3. Riassunto delle cose da mettere nella relazione.

La relazione dovrà includere:

- il numero di banco ed il corrispondente valore di h e σ_h;
- la tabella con misure dei tempi (Δt e Δt') di 10 oscillazioni per x=10-90 cm;
- il grafico dei due periodi di oscillazione (v. fig. 3);
- la tabella con le misure dei tempi di 20 (o più) oscillazioni per x_0-4cm < x < x_0+4cm;
- il grafico dei due periodi di oscillazione, con le rette interpolanti (v. fig. 4);
- il calcolo dei valori di x e T corrispondenti al punto di intersezione delle rette;
- il calcolo dell'errore su g, mostrando separatamente il contributo di σ_T, σ_h e l'errore complessivo;
- un confronto con il valore atteso ed eventuali considerazioni.