Divergenza

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In analisi la **divergenza** è un operatore che misura la tendenza di un campo vettoriale a divergere o a convergere verso un punto del campo. Per esempio in un campo vettoriale (a due dimensioni) che rappresenta la velocità dell'acqua contenuta in una vasca da bagno che si sta svuotando la divergenza avrebbe un valore negativo nella prossimità dello scarico dato che in quel punto l'acqua sparisce. Lontano dallo scarico la divergenza avrebbe un valore prossimo allo zero dato che in quei punti la velocità dell'acqua sarebbe quasi costante. Se supponiamo l'acqua incomprimibile, in una regione in cui non ci sono né *pozzi* in cui essa viene scaricata né *sorgenti* d'acqua, la divergenza del campo delle velocità sarà ovunque nulla. Un campo vettoriale con divergenza nulla ovunque viene definito solenoidale.

Indice

1 Definizione
2 Definizione Integrale
3 Proprietà
    3.1 Divergenza del rotore
4 Divergenza in altri sistemi di coordinate
    4.1 Divergenza in coordinate polari piane
    4.2 Divergenza in coordinate sferiche
    4.3 Divergenza in coordinate cilindriche
5 Voci correlate

Definizione

Definendo *x, y, z* le variabili che rappresentano le coordinate di uno spazio euclideo a tre dimensioni e definiti $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ i corrispettivi versori.

La divergenza di un campo vettoriale continuo e differenziabile

$$\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$$

è definita come la funzione scalare

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Un'altra notazione della divergenza è $\nabla \cdot \mathbf{F}$, in questa notazione il puntino rappresenta l'operazione di prodotto scalare tra l'operatore nabla ed il campo $\mathbf{F}$: dalle definizioni dei due operandi e dalla definizione di prodotto scalare è semplice verificare che il risultato è proprio $\operatorname{div}\mathbf{F}$.

Definizione Integrale

Ponendo per definizione la divergenza come:

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

cioè il limite, su un volume generico, tra il rapporto tra il volume stesso ed il flusso del vettore su tutta la superficie. Con questa definizione la *divergenza* viene ad assumere significato di derivata spaziale di un campo vettoriale come rapporto incrementale su un insieme di definizione che tende a zero. Il valore nullo riesce allora a descrivere la conservatività del campo quando questo rappresenta un campo di velocità.

Proprietà

Divergenza del rotore

La **divergenza** del **rotore** di qualsiasi campo vettoriale derivabile due volte è sempre pari a **0**.

Dimostrazione (F = campo vettoriale di classe C^2):

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \nabla \cdot (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) =$$
$$= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y}$$

Poiché la funzione è di classe C^2, applicando il Teorema di Schwartz le derivate miste si annullano, quindi la somma di queste quantità è nulla.

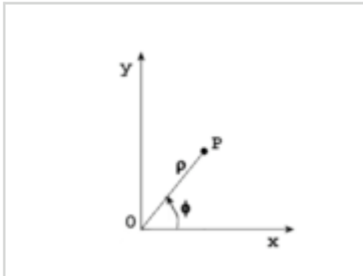
Divergenza in altri sistemi di coordinate

La definizione che abbiamo dato di divergenza come somma delle derivate parziali è relativa al sistema di riferimento cartesiano. Se utilizziamo altri sistemi di riferimento la divergenza non può più essere calcolata come somma delle derivate parziali calcolate rispetto alle nuove coordinate. Vediamo nel dettaglio come viene espressa nei principali sistemi di riferimento del piano e dello spazio.

Divergenza in coordinate polari piane

In $\mathbb{R}^2$ possiamo introdurre altri sistemi di riferimento come quello polare:

$$\begin{cases} x = \rho \ \cos\phi \\ y = \rho \ \sin\phi \end{cases}$$



Coordinate polari

Allora se $\mathbf{F}(\rho,\phi) = F_\rho \ \mathbf{e}_\rho + F_\phi \ \mathbf{e}_\phi$, la divergenza in coordinate polari diventa lo scalare:

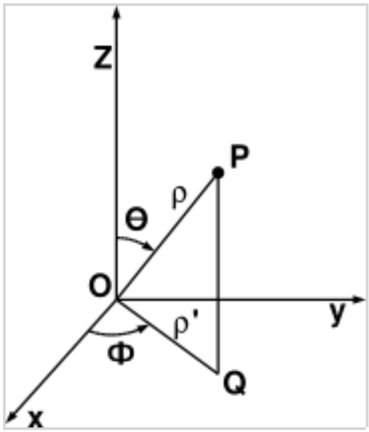
$$\operatorname{div}\mathbf{F}(\rho,\phi) = \vec{\nabla}\cdot\mathbf{F}(\rho,\phi) =$$

$$= \frac{\partial F_\rho(\rho,\phi)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\phi(\rho,\phi)}{\partial\phi}$$

Divergenza in coordinate sferiche

In $\mathbb{R}^3$ possiamo introdurre altri sistemi di riferimento come quelle sferiche:

$$\begin{cases} x = \rho \ \sin\theta \ \cos\phi \\ y = \rho \ \sin\theta \ \sin\phi \\ z = \rho \ \cos\theta \end{cases}$$



Coordinate sferiche

Allora se $\mathbf{F}(\rho,\theta,\phi) = F_\rho \ \mathbf{e}_\rho + F_\theta \ \mathbf{e}_\theta + F_\phi \ \mathbf{e}_\phi$, la divergenza in coordinate sferiche diventa lo scalare:

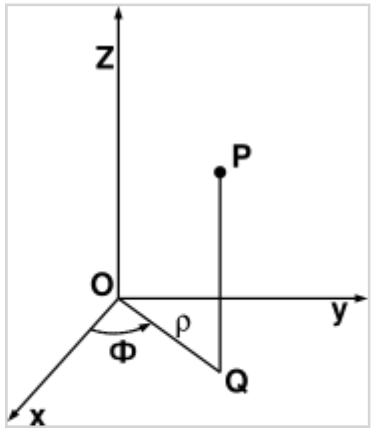
$$\operatorname{div}\mathbf{F}(\rho,\theta,\phi) = \vec{\nabla}\cdot\mathbf{F}(\rho,\theta,\phi) =$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial(\rho^2 \ F_\rho(\rho,\theta,\phi))}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta \ F_\theta(\rho,\theta,\phi))}{\partial\theta} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial F_\phi(\rho,\theta,\phi)}{\partial\phi}$$

Divergenza in coordinate cilindriche

In $\mathbb{R}^3$ possiamo introdurre altri sistemi di riferimento come quelle cilindriche:

$$\begin{cases} x = \rho \ \cos\phi \\ y = \rho \ \sin\phi \\ z = z \end{cases}$$



Coordinate cilindriche

Allora se $\mathbf{F}(\rho, \phi, z) = F_\rho \ \mathbf{e}_\rho + F_\phi \ \mathbf{e}_\phi + F_z \ \mathbf{e}_z$, la divergenza in coordinate cilindriche diventa lo scalare:

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(\rho, \phi, z) = \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F}(\rho, \phi, z) =$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho F_\rho(\rho, \phi, z))}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\phi(\rho, \phi, z)}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z(\rho, \phi, z)}{\partial z}$$

Voci correlate

- Gradiente
- Rotore
- Teorema della divergenza
- Teorema di Green
- Teorema di Stokes

Categoria: Calcolo vettoriale

- Ultima modifica per la pagina: 13:14, 5 mag 2007.
-