

Rotore (matematica)

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

(Reindirizzamento da Rotore (fisica))

Nel calcolo vettoriale, il **rotore** è un operatore che mostra la tendenza di un campo vettoriale a ruotare attorno a un punto.

I campi vettoriali che hanno rotore uguale a zero in tutto il campo sono chiamati irrotazionali.

Indice

- 1 Definizione
- 2 Proprietà
 - 2.1 Rotore del gradiente
- 3 Esempi
- 4 Voci correlate

Definizione

In matematica il rotore si indica come:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}$$

dove $\vec{\nabla}$ è l'operatore vettoriale differenziale nabra e $\vec{F}$ è il campo vettoriale su cui viene applicato il rotore.

In coordinate cartesiane, $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ è, dato $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\operatorname{rot} \vec{F})_1 \\ (\operatorname{rot} \vec{F})_2 \\ (\operatorname{rot} \vec{F})_3 \end{pmatrix}$$

Un semplice modo per ricordare il rotore è quello di scrivere la formula in forma pseudomatriciale come il determinante della seguente matrice:

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Dove $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, e $\mathbf{k}$ sono i versori degli assi x , y , e z .

Nella notazione di Einstein utilizzando i simboli sviluppati da Levi-Civita viene scritto come:

$$(\nabla \times \mathbf{F})_k = \epsilon_{klm} \partial_l F_m$$

Si noti che il risultato dell'applicazione dell'operatore rotore su un campo vettoriale non è realmente un vettore ma uno pseudo vettore. Questo significa che le coordinate vanno lette nel senso opposto rispetto a quello del campo cartesiano e quindi rispetto alla convenzione della mano destra. Per contro l'operatore rotore applicato su uno pseudo vettore genera un vettore.

In $\mathbb{R}^3$ possiamo introdurre altri sistemi di riferimento come quello dovuto alle coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z = z \end{cases}$$

Allora se il campo vettoriale $\mathbf{F}$ ha componenti:

$\vec{F}(\rho, \phi, z) = \mathbf{e}_\rho F_\rho + \mathbf{e}_\phi F_\phi + \mathbf{e}_z F_z$, il rotore in coordinate cilindriche diventa il vettore:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{F} &= \vec{\nabla} \times \vec{F} = \\ &= \mathbf{e}_\rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_\phi \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right) + \mathbf{e}_z \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho F_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi} \right) \end{aligned}$$

Proprietà

Rotore del gradiente

Il **rotore del gradiente** di qualsiasi funzione F di classe $\mathcal{C}^2$ (derivabile due

volte) è sempre **nullo** .

Dimostrazione:

$$\nabla \times (\nabla \Phi) = \nabla \times (F_x, F_y, F_z) \rightarrow \nabla \times (\nabla \Phi) = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix}$$

$= \vec{i}(F_{zy} - F_{yz}) + \vec{j}(F_{xz} - F_{zx}) + \vec{k}(F_{yx} - F_{xy})$. Essendo le componenti del campo derivabili due volte, per il Teorema di Schwartz le derivate miste sono uguali, quindi le quantità all'interno della parentesi si annullano e si ottiene il vettore nullo $(0, 0, 0)$.

Esempi

Il campo elettrico è uguale e opposto al tasso di variazione della densità del flusso magnetico.

La legge di Faraday- Henry è la seguente:

$$\text{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Voci correlate

- Gradiente
- Divergenza
- Teorema della divergenza
- Teorema di Green
- Teorema di Stokes

Categorie: Fisica matematica | Calcolo vettoriale

- Ultima modifica per la pagina: 15:20, 7 mag 2007.
- Tutti i testi sono disponibili nel rispetto dei termini della GNU Free Documentation License.