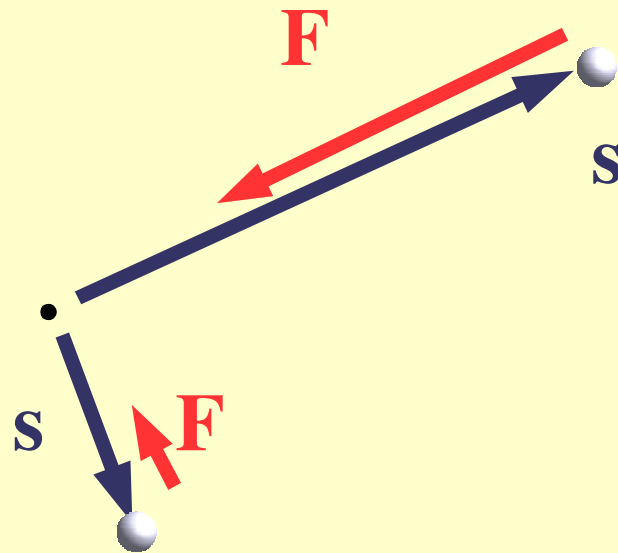


I moti armonici

- ★ Forze di Richiamo
- ★ Esempi di applicazioni
 - ★ la molla
 - ★ il pendolo semplice (e le piccole oscillazioni)
- ★ La soluzione generale per i moti armonici
- ★ Smorzamenti
- ★ Oscillatori Forzati
- ★ Le Risonanze

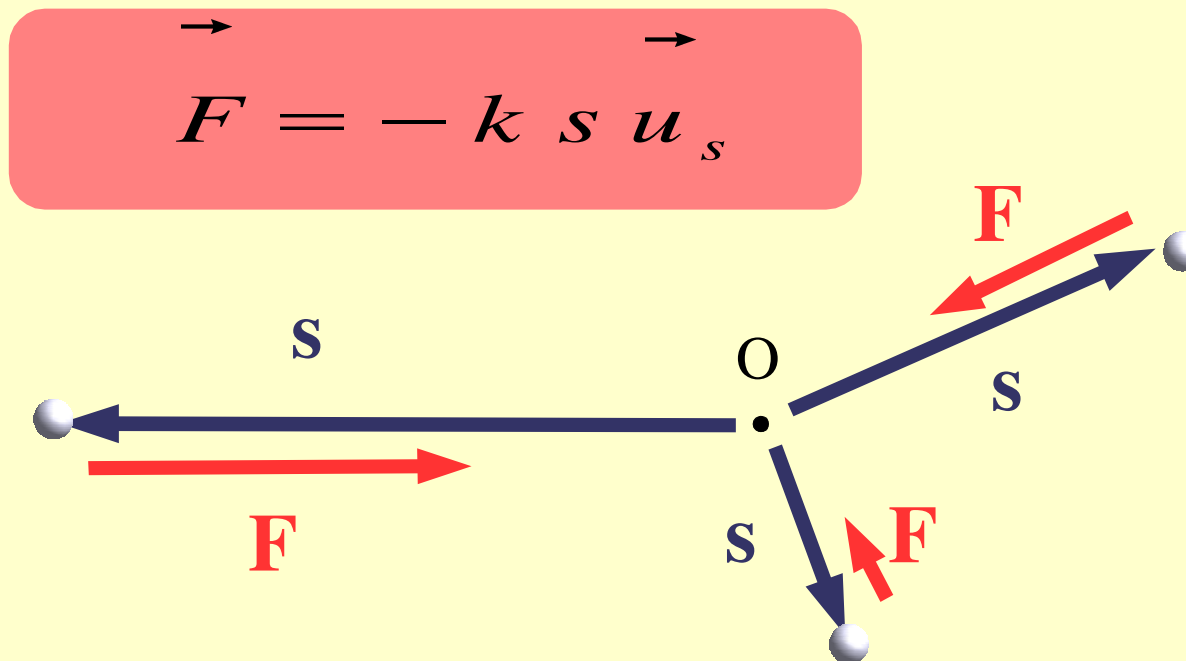
Forze di Richiamo

- ☆ Forze dirette nella stessa direzione, ma nel verso opposto, rispetto alla direzione dello spostamento riferito ad un punto di equilibrio

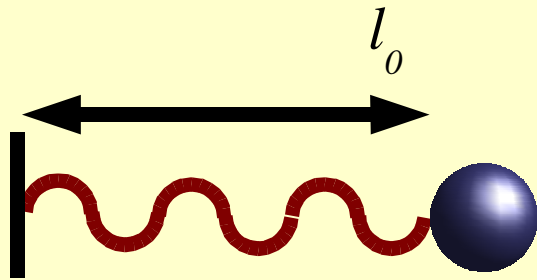


Oscillatore Armonico

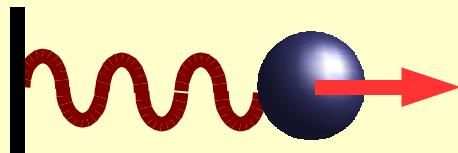
Limitiamo lo studio ai casi **(lineari)** in cui il modulo della forza $\mathbf{F}$ e' proporzionale al modulo dello spostamento $\mathbf{s}$, rispetto al punto O di equilibrio:



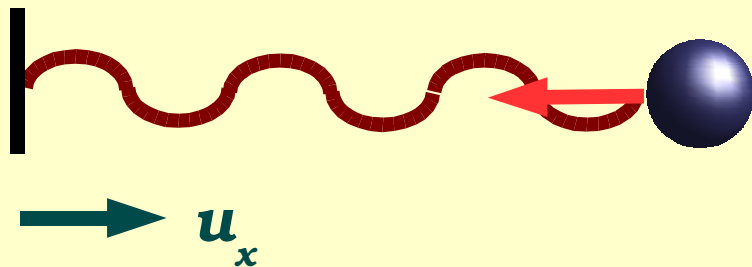
Esempio: la Molla



Riposo $|F| = 0$



Compressa $|F| = k (l - l_0)$



Dilatata $|F| = k (l - l_0)$

Posto $x = l - l_0$ (a riposo $x=0$) :

$$\vec{F} = -k x \vec{u}_x = m \vec{a}$$

L'equazione del moto della molla

Proiettando lungo l'asse del moto (x) e ricordando che $a = d^2x / dt^2$

$$m a = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k x$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

dove ho introdotto la pulsazione (propria) : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Esercizio : provare che $[\omega] = s^{-1}$

Esempio: il Pendolo Semplice

Riposo $\Theta = 0$

Il Legge:

$$\vec{m} \vec{a} = \vec{F} = \vec{m} \vec{g} + \vec{\tau}$$

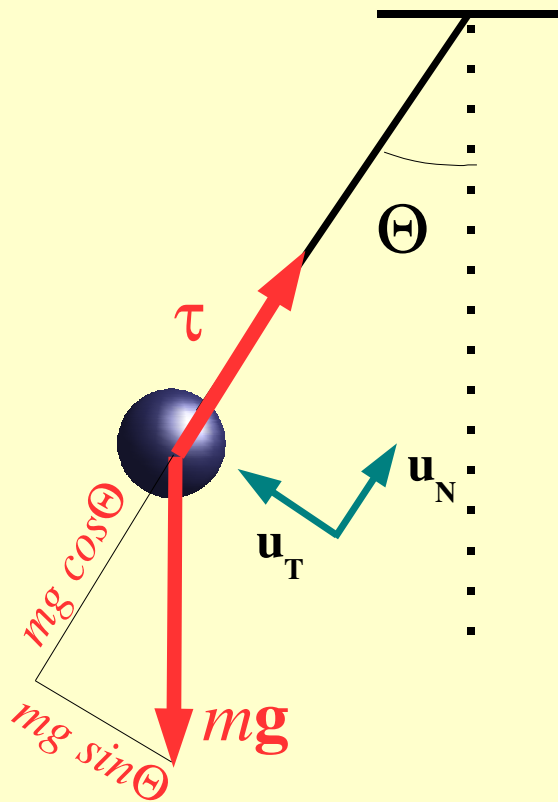
Proiettiamo in direzione normale ($\mathbf{u}_N$)

$$m a_N = m \frac{v^2}{L} = \tau - mg \cos(\Theta)$$

e tangenziale ($\mathbf{u}_T$):

$$m a_T = -mg \sin(\Theta)$$

solo quest'ultima ci interessa (ora)



Equazione del moto del Pendolo Semplice

Richiamo: F agisce sempre nel senso contrario all'aumento di Θ , da cui il segno $-$

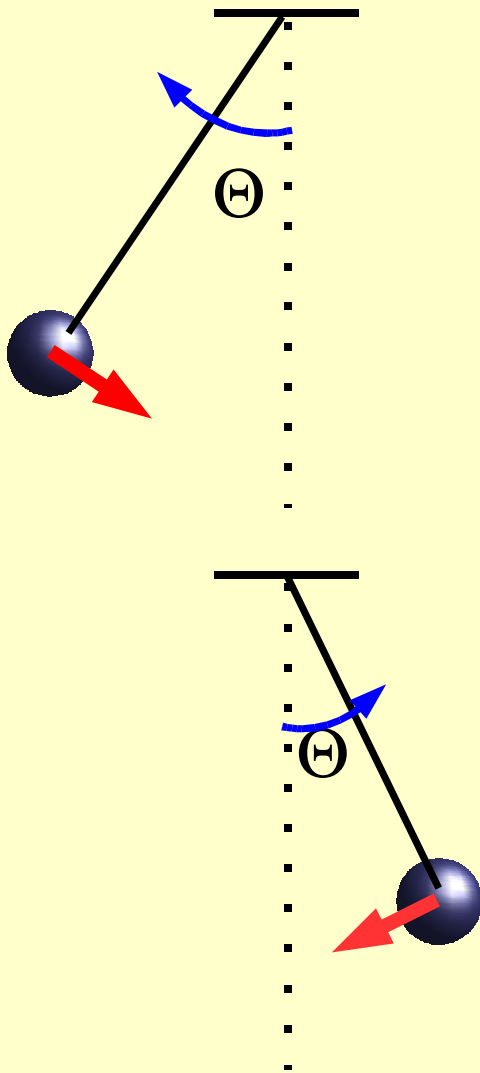
$$a_T = -g \sin(\Theta)$$

e ricordando la definizione di accelerazione angolare α :

$$a_T = L \alpha = L \frac{d^2 \Theta}{dt^2}$$

$$L \frac{d^2 \Theta}{dt^2} = -g \sin(\Theta)$$

$$\frac{d^2 \Theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin(\Theta) = 0$$



Le Piccole Oscillazioni

$$\frac{d^2 \Theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin(\Theta) = 0$$

se Θ e' abbastanza piccolo vale la relazione:

$$\sin(\Theta) \approx \Theta - \frac{\Theta^3}{3!} + \frac{\Theta^5}{5!} + \dots \approx \Theta$$

da cui si ricava la

$$\frac{d^2 \Theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \Theta = 0$$

$$\frac{d^2 \Theta}{dt^2} + \omega_0^2 \Theta = 0$$

$$, \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

L'equazione del moto dell'oscillatore armonico

★ Molla :
$$\frac{d^2 x}{d t^2} + \omega_0^2 x = 0 , \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

★ Pendolo (piccole oscillazioni):
$$\frac{d^2 \Theta}{d t^2} + \omega_0^2 \Theta = 0 , \omega_0^2 = \frac{g}{L}$$

★ Equazioni (*differenziali omogenee a coefficienti costanti del secondo ordine*)
formalmente identiche

★ Ammettono lo stesso tipo di soluzioni

Le Soluzioni

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Soluzioni : una classe di funzioni, del tipo

ω : Proprieta' intrinseca del sistema (k/m , g/L)

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \phi)$$

x_0 (ampiezza) : condizioni iniziali

ϕ (fase) : condizioni iniziali

Esercizio: verificare questa affermazione

Descrizione del moto

Moto confinato : $-x_0 \leq x \leq x_0$

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$$

x e v in quadratura di fase:

$$\omega_0 t + \phi = 2n\pi$$

$$x = \pm x_0 \quad (|x| \text{ massimo})$$

$$v = 0$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

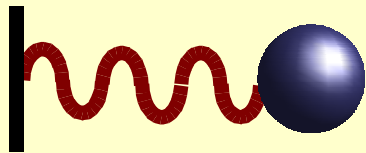
$$\omega_0 t + \phi = \frac{2n+1}{2}\pi$$

$$x = 0$$

$$v = \pm v_0 = \pm x_0 \omega_0$$

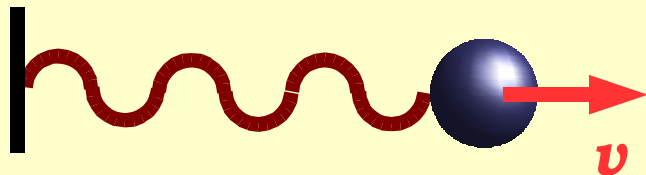
$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Esempio: la Molla



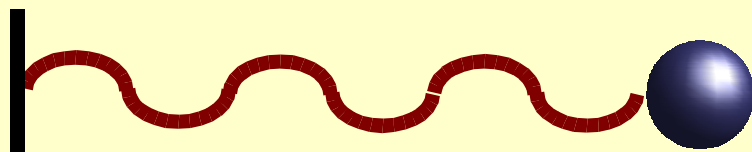
Max. Compressione

$$x = -x_0, v = 0$$



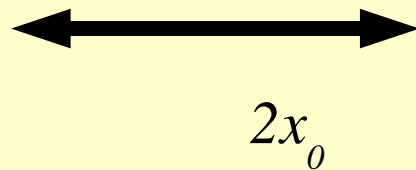
Rilassata

$$x = 0, v = v_{max}$$

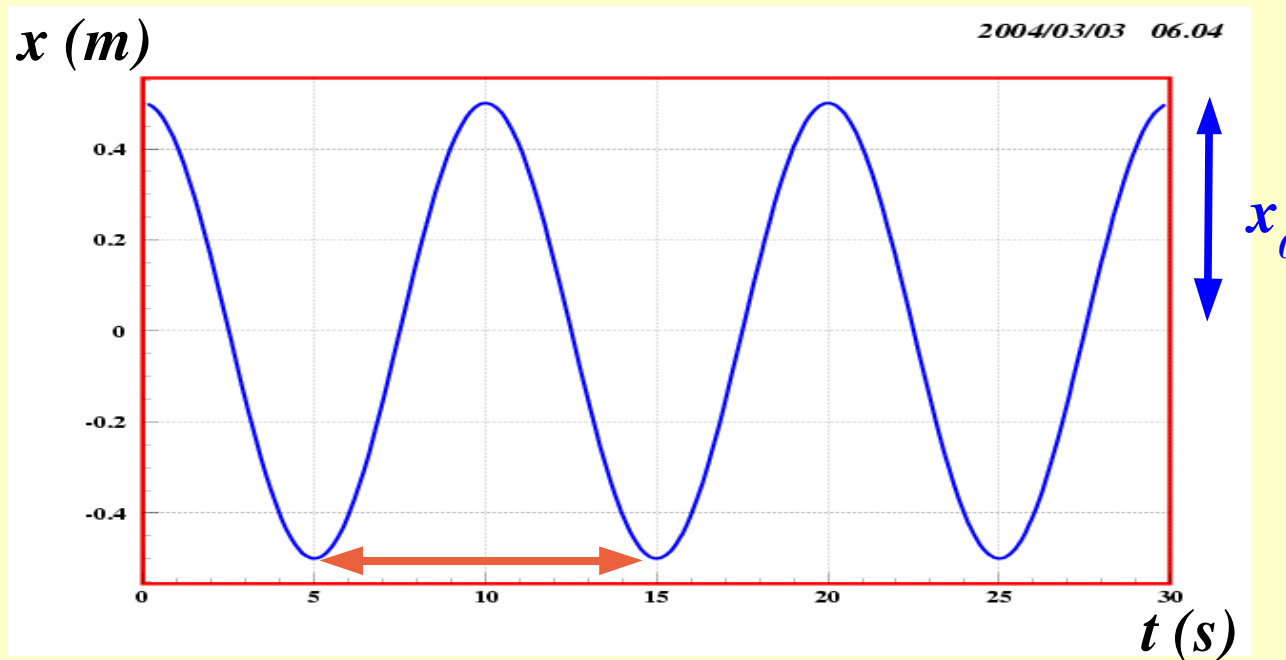


Max. Dilatazione

$$x = x_0, v = 0$$



Interpretazioni (1)



- Frequenza $\nu = \omega_0 / 2\pi = \# \text{ massimi per secondo}$

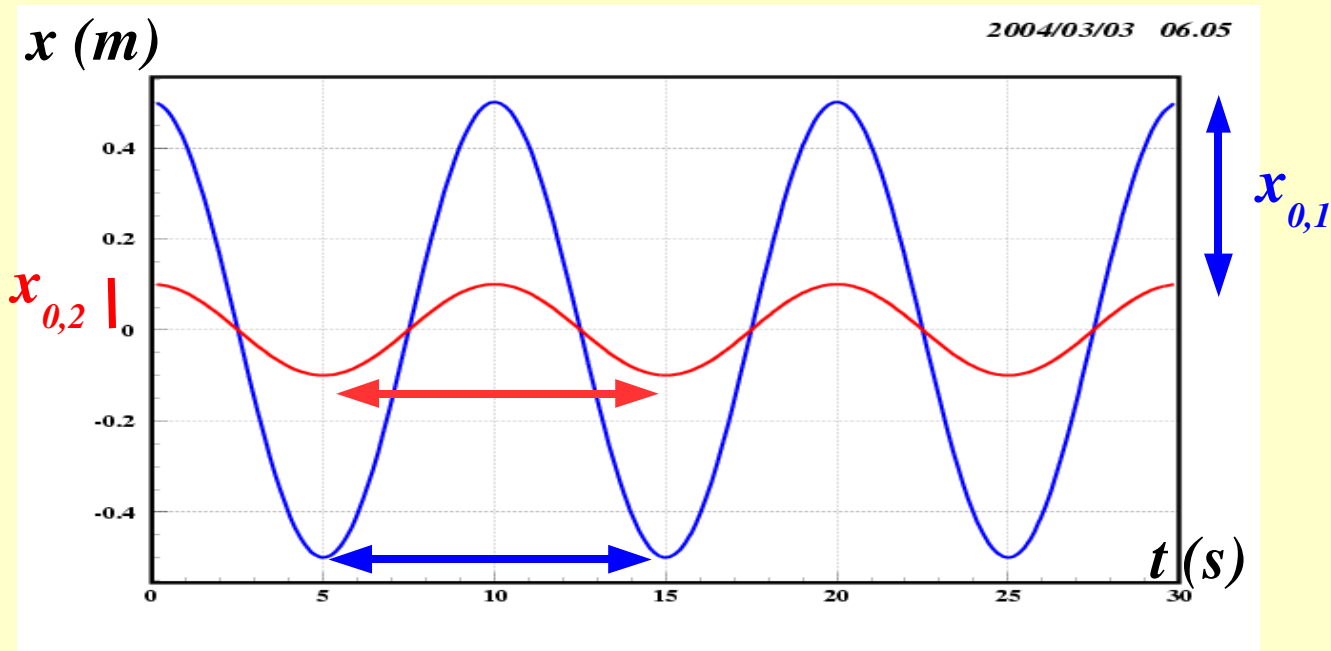
$$\nu = \mathbf{0.1 \text{ s}^{-1}}$$

$$\mathbf{T = 1/\nu = 2\pi/\omega_0 = 10 \text{ s}}$$
 periodo dell'oscillatore

- $\mathbf{x_0 = 0.5 \text{ m}}$ e' l' ampiezza dell'oscillazione
- In questo esempio la fase e' nulla !

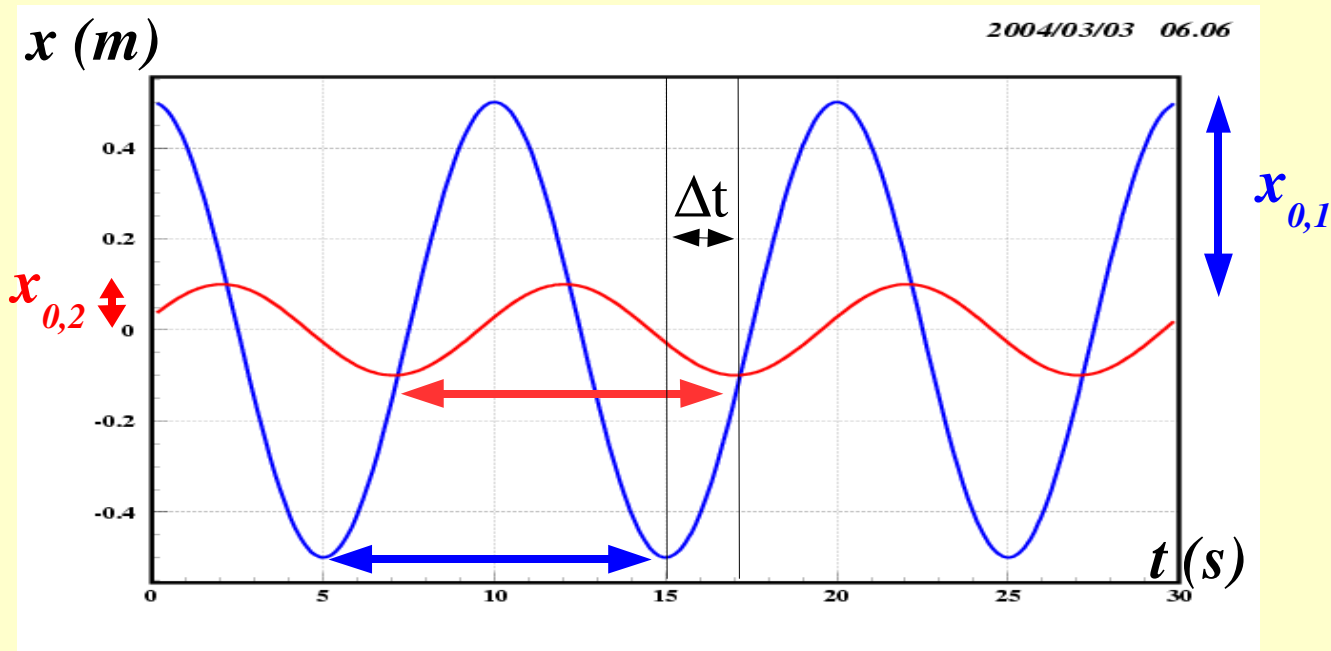
(la funzione ha il massimo all'origine)

Interpretazioni (2)



- Le due funzioni descrivono lo stesso sistema, dunque hanno uguale periodo **$T = 10 \text{ s}$** e pulsazione **$\omega_0 = 0.628 \text{ rad/s}$**
- Hanno (accidentalmente) la stessa fase (massimi sovrapposti)
- Le ampiezze sono diverse, stanno nel rapporto di **5:1**

Interpretazioni (3)



- Come sopra, ma con uno sfasamento:

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \omega \Delta t = 1.318 \text{ rad}$$

Ricapitolando ...

- ★ Il moto di molti sistemi puo' essere descritto, almeno in buona approssimazione dall'equazione:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + \omega_0^2 x = 0$$

dove ω_0 e' un parametro specifico del sistema. Oscillatori con caratteristiche diverse, ma con medesima ω_0 sono descritti dalla stessa legge e hanno uguale periodo

Esercizio 1.7 dal libro di testo

Isocronismo

Nel caso del pendolo:

$$\omega_0 = g/L$$

Da cui la legge di isocronismo (osservata da Galilei):

pendoli di uguale lunghezza oscillano col medesimo periodo, indipendentemente dalla massa del punto materiale che sostengono

L'indipendenza del periodo dalla massa e' conservata anche in presenza di attriti viscosi

Un caso piu' realistico

- ★ I moti cosi' descritti durano "per sempre"
- ★ Poco realistico
- ★ Attriti (di vario genere) smorzano in realta' il moto
- ★ Frequenti i casi di smorzamento proporzionale alla velocita' del moto (viscoso):

$$\mathbf{F}' = -\lambda \mathbf{v}$$

Moti Oscillatori Smorzati

Molla : $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k x - \lambda \frac{dx}{dt}$

Pendolo : $m L \frac{d^2 \Theta}{dt^2} = -mg \Theta - \lambda L \frac{d \Theta}{dt}$

Si riducono alla :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad 2 \gamma = \frac{\lambda}{m}$$

Esercizio : verifica !

Esercizio : $[\gamma] = \text{s}^{-1}$

Soluzioni:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

1) Smorzamento forte: $\gamma^2 > \omega_0^2$

$$x(t) = e^{-\gamma t} (x_{01} e^{t \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} + x_{02} e^{-t \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}})$$

2) Smorzamento critico: $\gamma^2 = \omega_0^2$

$$x(t) = e^{-\gamma t} (x_{01} t + x_{02})$$

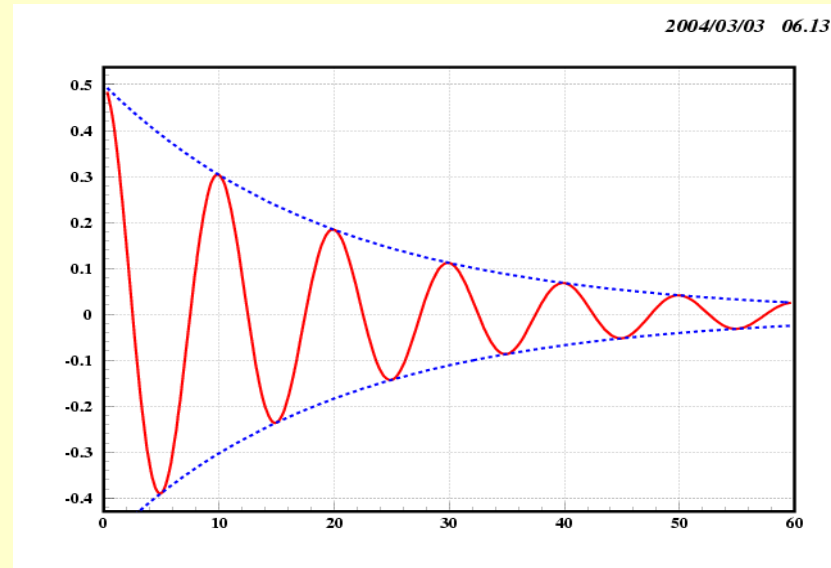
3) Smorzamento debole: $\gamma^2 < \omega_0^2$

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Osservazioni

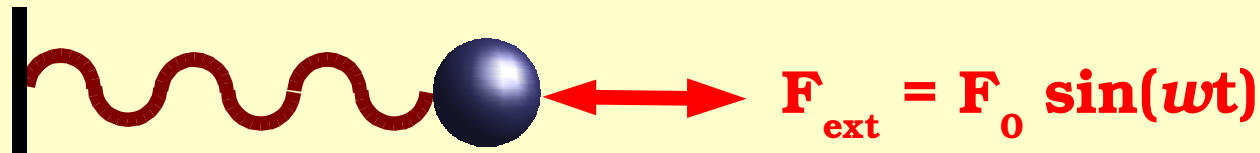
- ★ Tutte le soluzioni smorzate esponenzialmente dall'identico termine $e^{-\gamma t}$
- ★ Dopo un tempo pari a $\sim$ qualche volta $1/\gamma$ il moto e' estinto
- ★ Si osservano ancora soluzioni oscillanti solo nel caso di smorzamento debole. Ritroviamo le soluzioni non smorzate con la sostituzione

$$x_0 \rightarrow x_0 e^{-\gamma t}$$



Oscillatore Armonico Smorzato e Forzato

- ★ E' di notevole interesse il caso in cui il sistema non sia libero, ma sia forzato da una sollecitazione esterna (motore) sinusoidale



$$\frac{d^2 x}{d t^2} + 2 \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin (\omega t)$$

(N.B. $\omega \neq \omega_0$)

Soluzione

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t)$$

$$x(t) = e^{-\gamma t} f(\omega_0 t) + x_0(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))$$

← Transiente

$$t \gg 1/\gamma$$

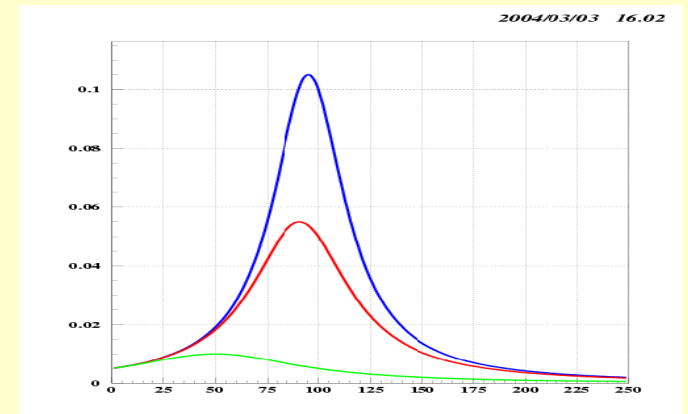
$$x(t) = x_0(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))$$

Oscillante con pulsazione ω (esterna)

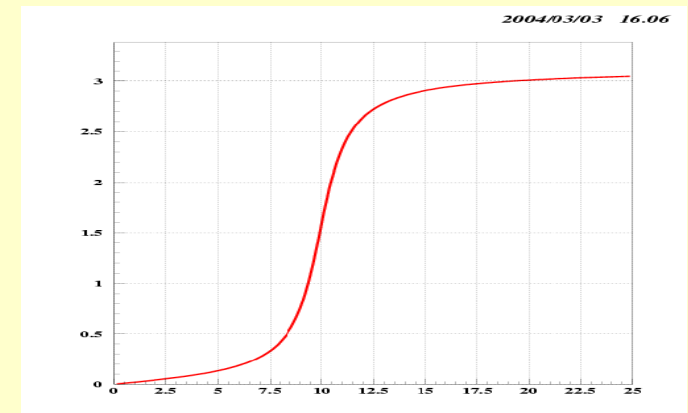
Da notare

- ☆ Ampiezza e fase non dipendono dalle condizioni iniziali, ma sono determinati dai parametri del motore (F_0, ω) e del sistema

$$x_0(\omega) = \frac{F_0 / m}{(\omega - \omega_0)^2 + 4 \gamma^2 \omega^2}$$



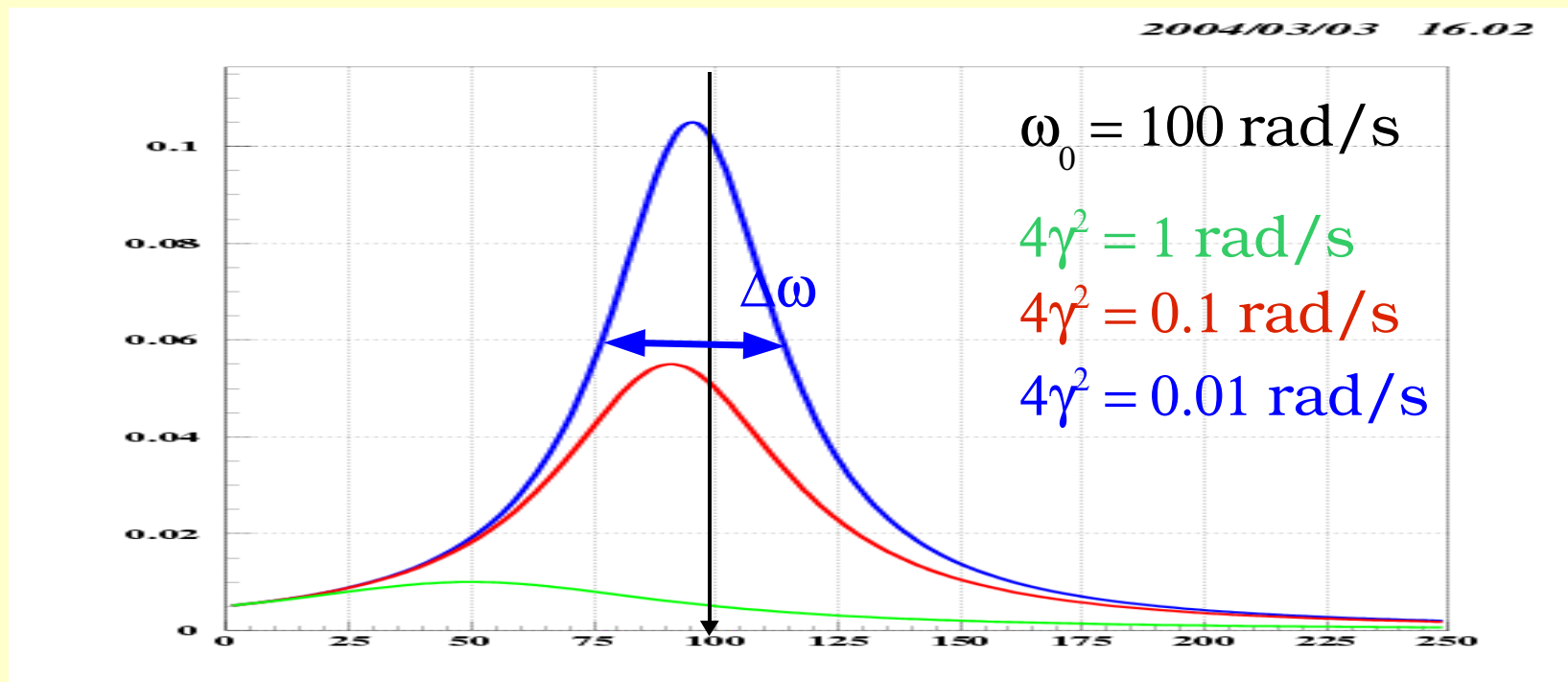
$$\text{tg}(\phi(\omega)) = \frac{2 \gamma \omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$



Ampiezza

$$x_0(\omega) = \frac{F_0}{(\omega - \omega_0)^2 + 4\gamma^2\omega^2}$$

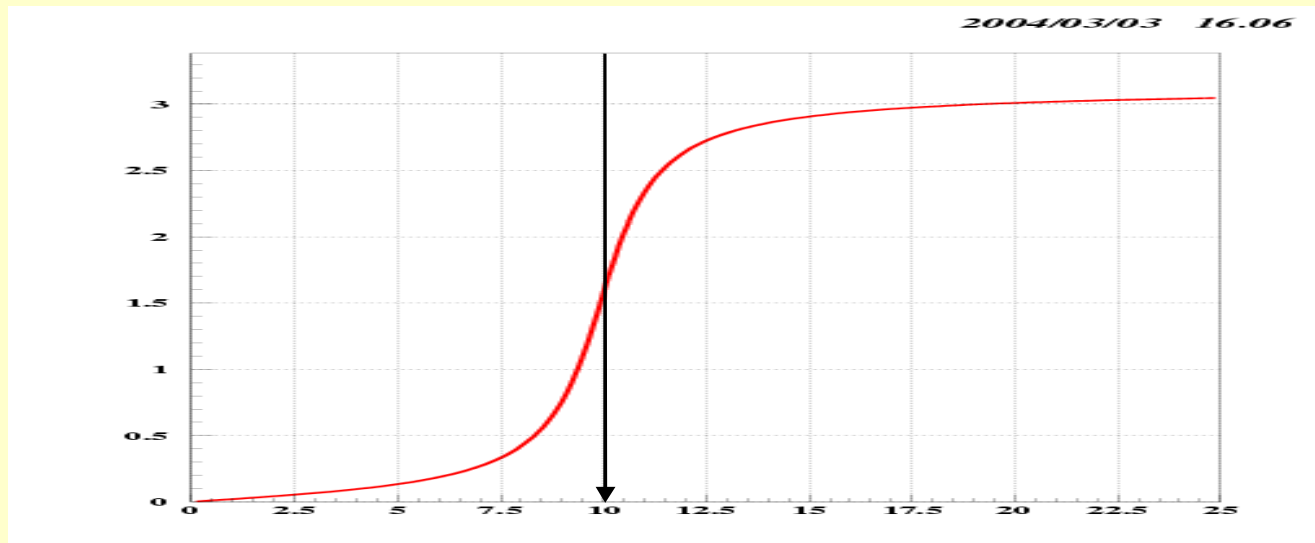
- ★ Corrisponde ad una campana , con massimo $\omega \sim \omega_0$ (per piccoli smorzamenti)
- ★ $Q = \omega_0/\Delta\omega$ da' la " bonta' " della risonanza (tanto e' maggiore, quanto piu' la campana e' stretta)



Sfasamento

$$\operatorname{tg}(\phi(\omega)) = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

- ★ Relazione tra moto del sistema e sollecitazione esterna
- ★ $\omega \ll \omega_0$: in fase (sistema e motore ~ solidali)
- ★ $\omega \gg \omega_0$: opposizione di fase (max da parti opposte)
- ★ $\omega \sim \omega_0$: quadratura di fase (max $\Leftrightarrow$ min)



Risonanza

- ★ $\omega \sim \omega_0$: risonanza (corrisponde approssimativamente al massimo della curva se lo smorzamento e' piccolo)
- ★ in queste condizioni e' massima la risposta del sistema alla sollecitazione
- ★ il sistema vibra in quadratura di fase con il motore (cioe' la vibrazione e' massima quando la sollecitazione e' minima, e viceversa)

Applicazioni

- ★ Stabilità di strutture dotate di frequenza proprie e soggette a vibrazioni esterne (ponti, grattacieli, etc.)
 - Evitare la risonanza
- ★ Circuiti elettrici (sintonizzatori)
 - Risonanza stretta (alto Q-valore)
- ★ Particelle elementari di piccolissima vita media ($< 10^{-20}$ sec)
 - Descritte dalla risonanza !