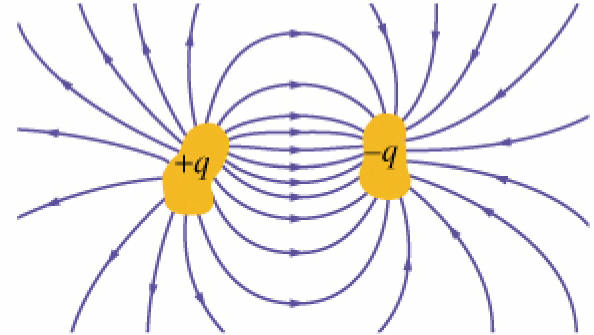
I condensatori



Un **condensatore** è un dispositivo in grado di **immagazzinare energia**, sottoforma di energia potenziale, in un campo elettrico

Ogni volta che abbiamo a che fare con due conduttori di **forma arbitraria** detti **piatti** o **armature**, possiamo parlare di condensatore

Quando le armatura hanno cariche uguali e di segno opposto, **+q e –q**, il condensatore si dice **carico**, mentre con **carica del condensatore** si intende il **valore assoluto della carica q** presente su ciascun piatto (infatti globalmente il condensatore è neutro). Fra le due armature cariche c'è una **differenza di potenziale ΔV** (o più semplicemente V)

Si definisce **capacità** di un condensatore **C** la quantità

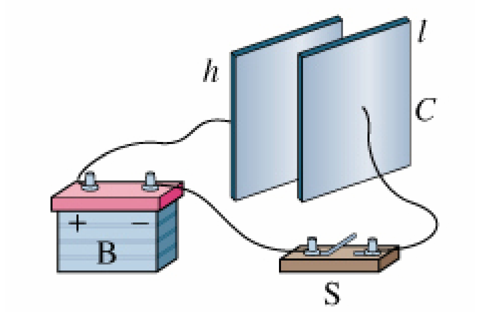
$$\boxed{C = \frac{q}{\Delta V}}$$

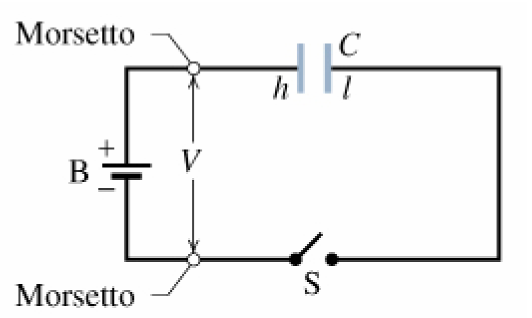
C dipende solo dalla **geometria dei piatti** e ci dice quanta carica serve ad un dato condensatore per portarlo ad una **ΔV fissata**. **Se C ↑ allora q ↑**

Nel SI l'unità di misura della capacità è il **farad (F)**

$$farad = F = CV^{-1} = m^{-2}kg^{-1}s^{2}C^{2}$$

Nella pratica si verifica che il farad è un'unità troppo grande e quindi si usano i sottomultipli come il **μF** e il **pF**



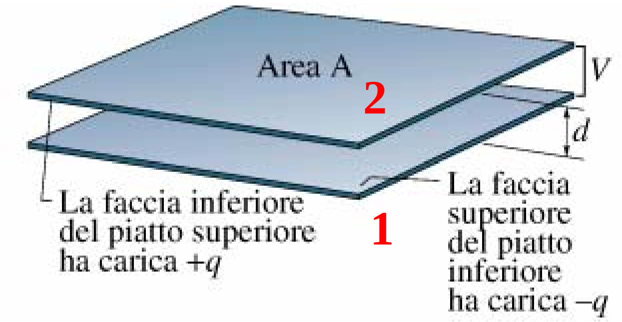


Il processo di carica di un condensatore consiste essenzialmente nel costruire un circuito che sia in grado di **portare la carica +q e –q sulle armature**. Il metodo più semplice è quello di collegare ciascuna armatura ai capi di una **batteria** (B) che fornisce una **d.d.p. ΔV**.

Quando l'interruttore S viene chiuso, gli **elettroni sulla piastra h fluiscono verso il polo positivo** della batteria sotto l'azione del campo elettrico mantenuto dalla batteria.

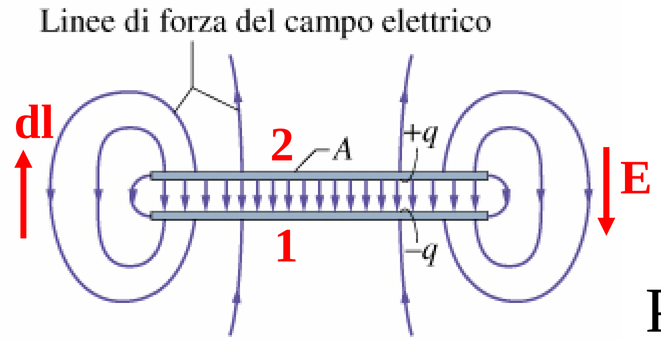
Analogamente c'è un **flusso di elettroni dal polo negativo alla piastra l**.

Quando la **d.d.p. tra le armature** del condensatore **eguaglia** quella tra i **poli della batteria**, le correnti cessano e il **condensatore risulta carico**



Consideriamo ora un condensatore le cui armature siano due **lastre conduttrici piane** e **parallele** di **area A** e a **distanza d** l'una dall'altra, la **carica** del condensatore sia **q** e lo spazio tra le armature sia inizialmente riempito d'**aria**.

Il **campo elettrico** tra le armature sarà **uniforme** fintanto che ci manteniamo distanti dai bordi delle armature e varrà



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

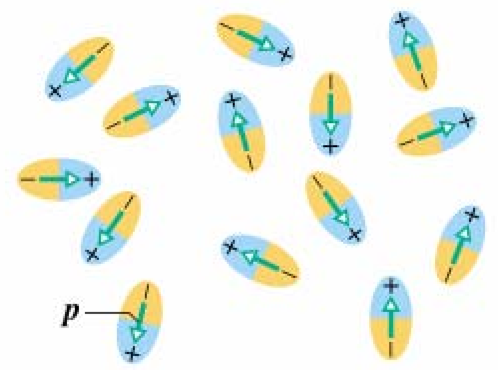
Per la d.d.p. avremo

$$\Delta V = V_2 - V_1 = -\int_1^2 \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\int_1^2 Edl \cos 180° = Ed = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

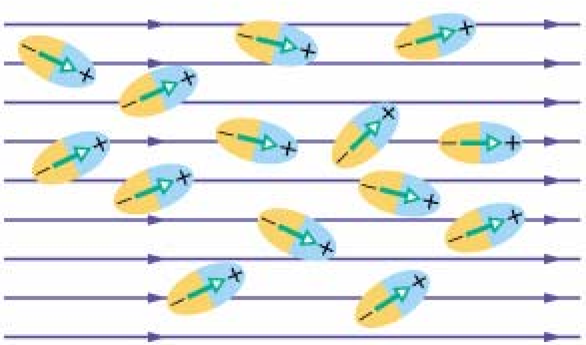
Ricordando che **q = σA**, abbiamo che la **capacità** vale

$$C_0 = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\sigma S \varepsilon_0}{\sigma d} = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \quad \textit{dipende solo dalla geometria}$$

Dielettrici



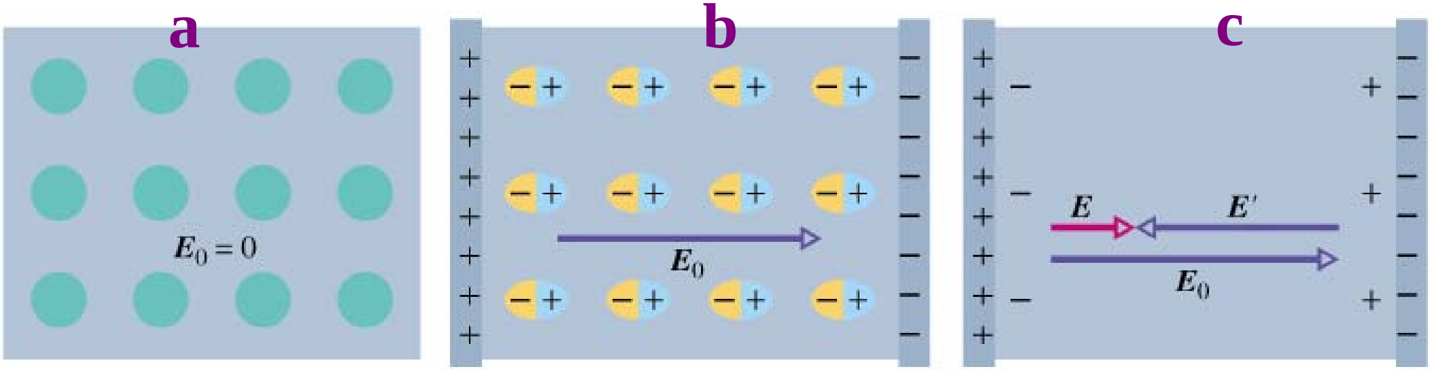
(a)



(b)

Dielettrici polari: le molecole hanno un **momento di dipolo permanente**
i dipoli si allineano con il campo elettrico esterno, anche se l'allineamento non è mai completo a causa dell'agitazione termica.
L'**allineamento** cresce al crescere di **E** esterno e al diminuire della temperatura
Si crea così un **campo elettrico opposto a quello esterno** e sempre inferiore ad esso
Dielettrici non polari: **non hanno un momento permanenente di dipolo**, ma esso viene creato dal campo esterno. Per il resto vale quanto detto per i dielettrici polari.

Nel dielettrico (non polare) **non** sottoposto a **campo esterno E (a)** le molecole possono essere pensate **prive di momento di dipolo**
Quando **si applica il campo elettrico esterno (b)** i centri delle distribuzioni di carica all'interno di ciascuna molecola si separano sufficientemente da **creare i dipoli** e quindi **la polarizzazione** del dielettrico. Il tutto può essere visto **(c)** come **l'accumularsi di una carica negativa** sulla faccia della lastra **vicina all'elettrodo positivo**, ed una **carica uguale in modulo, ma positiva** sulla **faccia opposta** del dielettrico. Globalmente la **lastra resta neutra**, ma al suo **interno** si crea un **campo E' minore del campo esterno E_0** ed in **verso opposto** ad esso, pertanto, l'effetto finale **campo E minore di quello di partenza E_0**



Un pezzo di dielettrico posto in un campo elettrico esterno si **polarizza**

Polarizzazione $\Rightarrow$ dipolo macroscopico che tende a muoversi nella direzione in cui cresce il campo elettrico

Vettore polarizzazione P: momento elettrico di dipolo del mezzo per unità di volume (**n** è il numero di atomi per unità di volume)

$$\vec{\mathcal{P}} = n\vec{p}$$

In generale è

$$\vec{\mathcal{P}} \propto \vec{E}$$

$$[\mathcal{P}] = C \cdot m^{-2} \quad \textit{carica per unità di superficie}$$

$$\varepsilon_0 \vec{E} = \frac{q}{4\pi r^2} \Rightarrow [\varepsilon_0 \vec{E}] = C \cdot m^{-2}$$

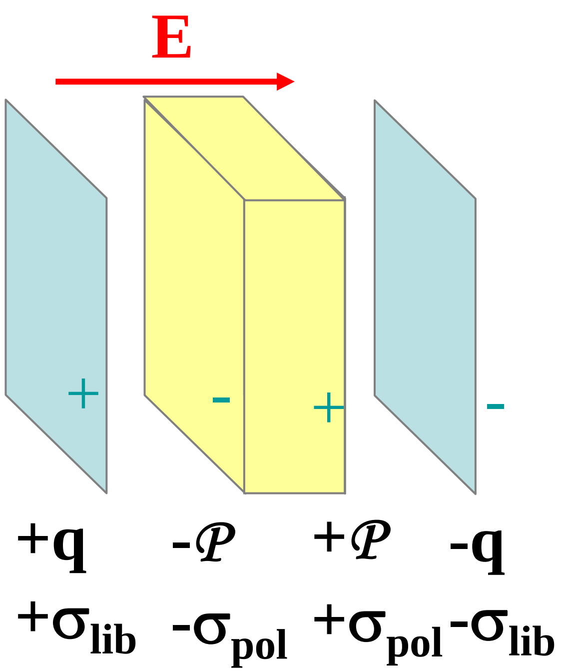
Abbiamo così

$$\vec{\mathcal{P}} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

χ_e è la **suscettività elettrica** del materiale, è un **numero puro positivo**

Spostamento elettrico

Dielettrico	cariche di polarizzazione	non sono libere di muoversi
Conduttore	cariche libere	libere di muoversi



Poniamo una piastra di dielettrico tra due piastre conduttrici uniformememnte cariche con carica uguale ed opposta

Le **cariche libere** sui conduttori producono un campo elettrico **E** che polarizza la piastra di dielettrico $\Rightarrow$ si creano **cariche di polarizzazione** sulle superfici del dielettrico $\Rightarrow$ σ_{pol}

Le σ_{pol} **creano un campo opposto ad E** nel dielettrico

$$\sigma^{-}_{pol} = -\mathcal{P} \qquad \sigma^{+}_{pol} = +\mathcal{P}$$

Globalmente le cariche si elidono in parte lasciando una **carica effettiva** su ciascuna faccia

$$\boxed{\sigma = \sigma_{lib} - \mathcal{P}}$$

Il campo elettrico finale risulta

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\sigma_{lib} - \mathcal{P}\right)$$

$$\sigma_{lib} = \varepsilon_0 E + \mathcal{P}$$

Definiamo una nuova quantità chiamata **spostamento elettrico**

$$\vec{\mathcal{D}} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{\mathcal{P}} \qquad \left[\mathcal{D}\right] = C \cdot m^{-2}$$

Nel nostro caso

$$\boxed{\sigma_{lib} = \mathcal{D}}$$

La **componente di $\mathcal{D}$ lungo la normale alla superficie** di un conduttore immerso in un dielettrico, **dà la densità di carica** superficiale sul conduttore stesso

$$\sigma_{lib} = \vec{\mathcal{D}} \cdot \vec{u}_n \qquad e \qquad \sigma = \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{u}_n$$

σ rappresenta la carica effettiva

$$q_{lib} = \oint_S \sigma_{lib} dS = \oint_S \vec{\mathcal{D}} \cdot \vec{u}_n dS = \Phi_{\vec{\mathcal{D}}}$$

Si può dimostrare che il **flusso di $\mathcal{D}$** attraverso una superficie chiusa qualsiasi **è uguale alla carica libera totale** entro la superficie, escluse le cariche di polarizzazione del mezzo

$$\vec{\mathcal{D}} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = (1 + \chi_e)\varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\varepsilon = (1 + \chi_e)\varepsilon_0 \qquad \textit{permeattività del mezzo}$$

$$[\varepsilon] = m^{-3} kg^{-1} s^2 C^2$$

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \chi_e \qquad \textit{permeattività relativa}$$

La **permeattività relativa o costante dielettrica** è un **numero puro** di solito > 1

Se abbiamo che $\mathcal{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, allora

$$q_{lib} = \oint_S \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{u}_n dS \qquad se\ \varepsilon = costante\ (mezzo\ omogeneo)$$

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{u}_n dS = \frac{q_{lib}}{\varepsilon}$$

Per una **carica puntiforme in un dielettrico** abbiamo

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{r^2} \vec{u}_r \qquad V = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{r} \qquad \varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon$$

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r^2} \qquad \varepsilon > \varepsilon_0 \Rightarrow F < F_{vuoto}$$

In conclusione possiamo affermare che **le molecole** del dielettrico **schermano l'interazione**

Se ora riempiamo lo spazio tra le armature con un **dielettrico** di costante dielettrica $\boldsymbol{\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r}$, abbiamo

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

$$\Delta V = V_1 - V_2 = \frac{d\sigma}{\varepsilon}$$

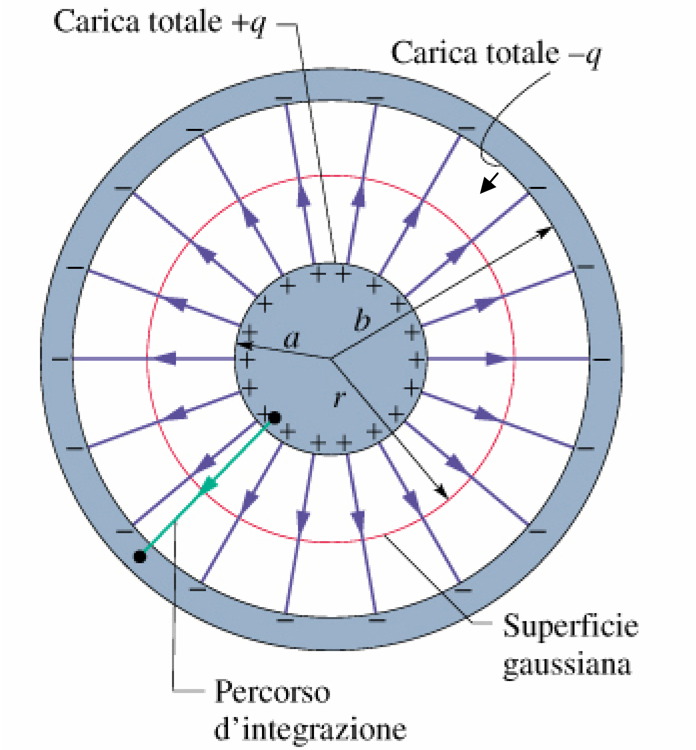
$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\sigma A}{d\sigma}\varepsilon = \varepsilon \frac{A}{d} = \varepsilon_r C_0$$

Si noti che essendo $\boldsymbol{\varepsilon > \varepsilon_0}$, si ha che $\mathbf{C > C_0}$

Confrontando $\mathbf{C}$ **e** $\mathbf{C_0}$ per uno stesso condensatore si ottiene il valore di ε_r del dielettrico utilizzato

L'unico modo per **aumentare la capacità** di un condensatore, una volta fissata la sua geometria è di **riempirlo con una lastra di dielettrico**

Condensatore cilindrico



Condensatore cilindrico di **lunghezza L**, costituito da due cilindri coassiali di raggi **a** e **b**, con **L >> b**, e **carica q** sulle armature. Consideriamo una superficie cilindrica coassiale con le armature di **raggio r** e di lunghezza **L**, con **a < r < b**, e applichiamo il **teorema di Gauss**

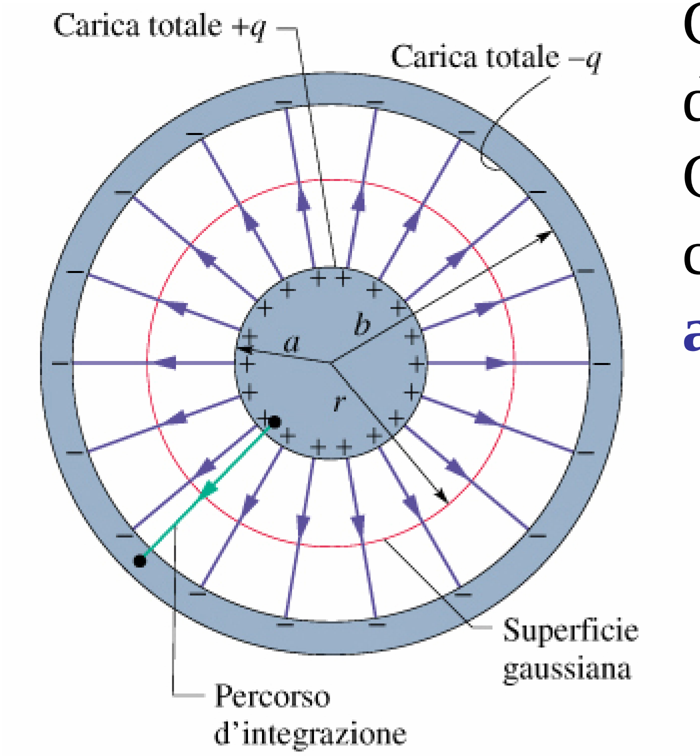
$$q = \varepsilon E A = \varepsilon E\, 2\pi r L \Rightarrow E = \frac{q}{2\pi\varepsilon r L}$$

Ricordiamo ora che $E = -gradV$

e così otteniamo $\Delta V = V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{r}$

e quindi $\Delta V = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon L}\displaystyle\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon L}\ln\frac{b}{a} \Rightarrow C = \frac{q}{\Delta V} = 2\pi\varepsilon\,\frac{L}{\ln b/a}$

Condensatore sferico



Condensatore sferico costituito da due sfere di raggi **a** e **b** e **carica q** sulle armature. Consideriamo una superficie sferica concentrica con le armature di **raggio r**, con **a < r < b**, e applichiamo il **teorema di Gauss**

$$q = \varepsilon EA = \varepsilon E\,4\pi r^2 \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

Per la d.d.p. abbiamo

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{b-a}{ab}$$

da cui

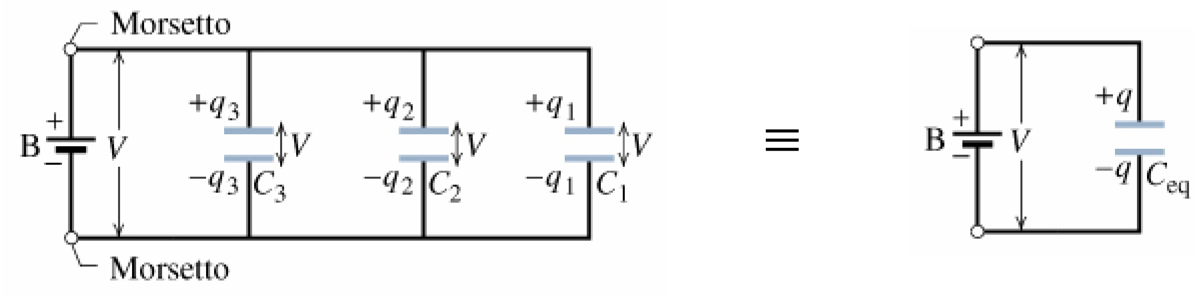
$$C = \frac{q}{V} = 4\pi\varepsilon\frac{ab}{b-a}$$

Se b va all'infinito, abbiamo sempre un condensatore con

$$C = 4\pi\varepsilon a$$

Condensatori in parallelo

I condensatori in parallelo sono **tutti alla stessa d.d.p.** e la **carica totale q** immagazzinata in essi è la **somma delle cariche** su ciascun condensatore. Il sistema **equivale** ad **un condensatore alla stessa d.d.p e con carica q**



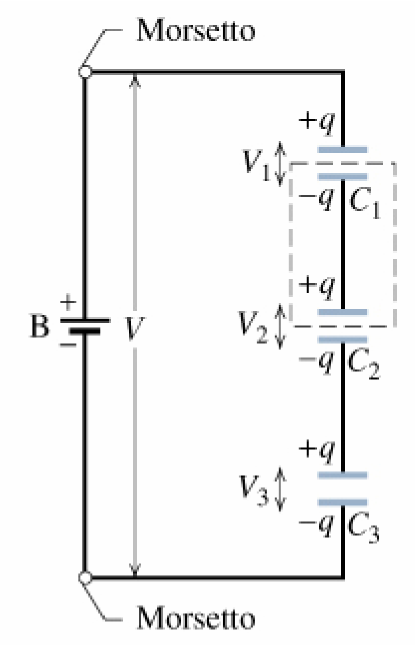
Abbiamo

$$q_1 = C_1 V,\ q_2 = C_2 V, ..., q_n = C_n V$$
$$q = q_1 + q_2 + ... + q_n$$
$$q = C_1 V + C_2 V + ... + C_n V = (C_1 + C_2 + ... + C_n) V$$

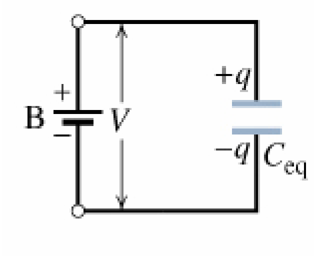
infine

$$C_{eq} = \frac{q}{V} = C_1 + C_2 + ... + C_n = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

Condensatori in serie



$\equiv$



I condensatori in serie sono ad una d.d.p. tale che la **carica q su** ciascuno di essi è la **stessa**.

Il sistema **equivale** ad **un condensatore con carica q** e con d.d.p. pari alla somma delle d.d.p. applicate

Abbiamo

$$V_1 = \frac{q}{C_1},\ V_2 = \frac{q}{C_2}, \ldots, V_n = \frac{q}{C_n}$$

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$$

$$V = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}\right) q$$

Infine

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

Energia immagazzinata in un campo elettrico

Abbiamo già visto che per costruire un sistema di cariche, dobbiamo fare un lavoro dall'esterno, il **lavoro fatto equivale ad una variazione di energia potenziale elettrostatica**

$$W = -\Delta U = \sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{r_{ij}}$$

Anche quando carichiamo un condensatore abbiamo bisogno di un lavoro che permetta di togliere elettroni alla piastra positiva, questo lavoro è fornito da una batteria o da un generatore.

Il lavoro infinitesimo per portare una carica infinitesima dq' attraverso una d.d.p. V' vale

$$dW = dq'V' = dq'\frac{q'}{C}$$

$$W = \frac{1}{C}\int_0^q q'dq' = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2$$

Si può pensare che questo **lavoro** venga **immagazzinato** nel condensatore sottoforma di **energia elettrostatica**, allora

$$U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2$$

Se consideriamo due condensatori a piatti piani e paralleli e con la stessa carica q, notiamo che essi hanno anche lo stesso campo elettrico, hanno però diversa capacità di immagazzinare energia elettrostatica

$$U_1 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_1} \qquad U_2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_2}$$

Dato che **C è inversamente proporzionale** alla distanza **d** tra le armature si avrà che il **condensatore con i piatti più distanti può immagazzinare una maggiore quantità di energia**

Risulta utile definire la **densità di energia**, ovvero l'energia elettrostatica per unità di volume

$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{CV^2}{2Ad} = \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{V}{d}\right)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

Il risultato ottenuto risulta valido per ogni tipo di condensatore, infatti consideriamo una sfera conduttrice (C = 4πεR) e calcoliamo la seguente quantità

$$\int_0^{Vol} E^2 dV = \int_R^{\infty}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon}\right)^2 \frac{1}{r^4} dV$$

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

$$\int_0^{Vol} E^2 dV = \int_R^{\infty}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon}\right)^2 \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr = \int_R^{\infty}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon^2}\frac{1}{r^2} dr =$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon^2}\int_R^{\infty}\frac{1}{r^2} dr = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon^2}\frac{1}{R}$$

Ricordiamo che per una sfera l'energia elettrostatica U vale

$$U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon R}$$

Quindi

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon\int_R^\infty E^2 dV$$

In generale

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon \int_{\text{tutto il volume}} E^2 dV$$

La densità di energia vale

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

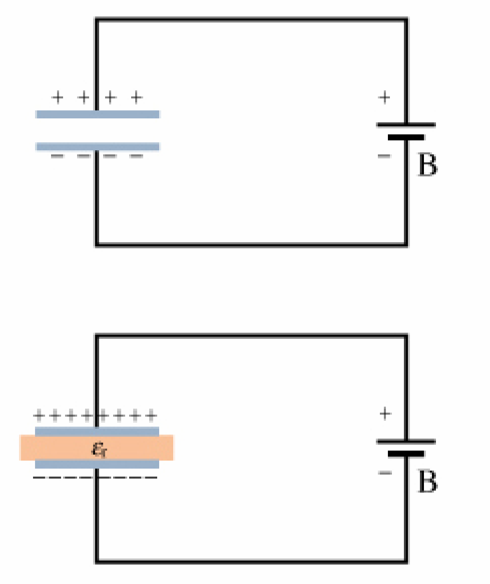
Lavoro per inserire una lastra di dielettrico in un condensatore

a) processo a V costante

Inizialmente l'energia immagazzinata nel condensatore vale

$$U_0 = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C_0} = \frac{1}{2}C_0V^2$$

Dopo l'inserimento della lastra abbiamo



V costante

$$U_1 = \frac{1}{2}\frac{q_1^2}{C_1} = \frac{1}{2}C_1V^2$$

Ricordando che $C_1 = \varepsilon_r C_0 > C_0$

otteniamo $U_1 > U_0$

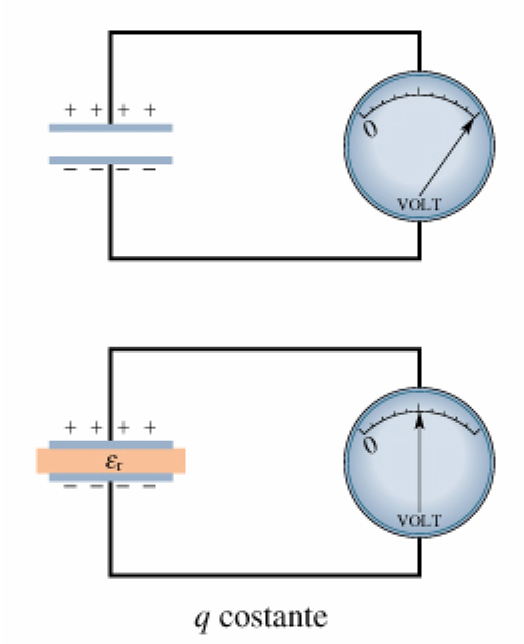
Il lavoro necessario viene fornito dalla batteria

b) processo a q costante

Inizialmente l'energia immagazzinata nel condensatore vale

$$U_0 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_0} = \frac{1}{2}C_0V_0^2$$

Dopo l'inserimento della lastra abbiamo



$$U_1 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_1} = \frac{1}{2}C_1V_1^2$$

Ricordando che $C_1 = \varepsilon_r C_0 > C_0$

otteniamo $U_1 < U_0$

La variazione di energia viene utilizzata per polarizzare la lastra ed inserirla nel condensatore