

Campi Elettrici

Scannicchio: capitoli 17, 18, 19

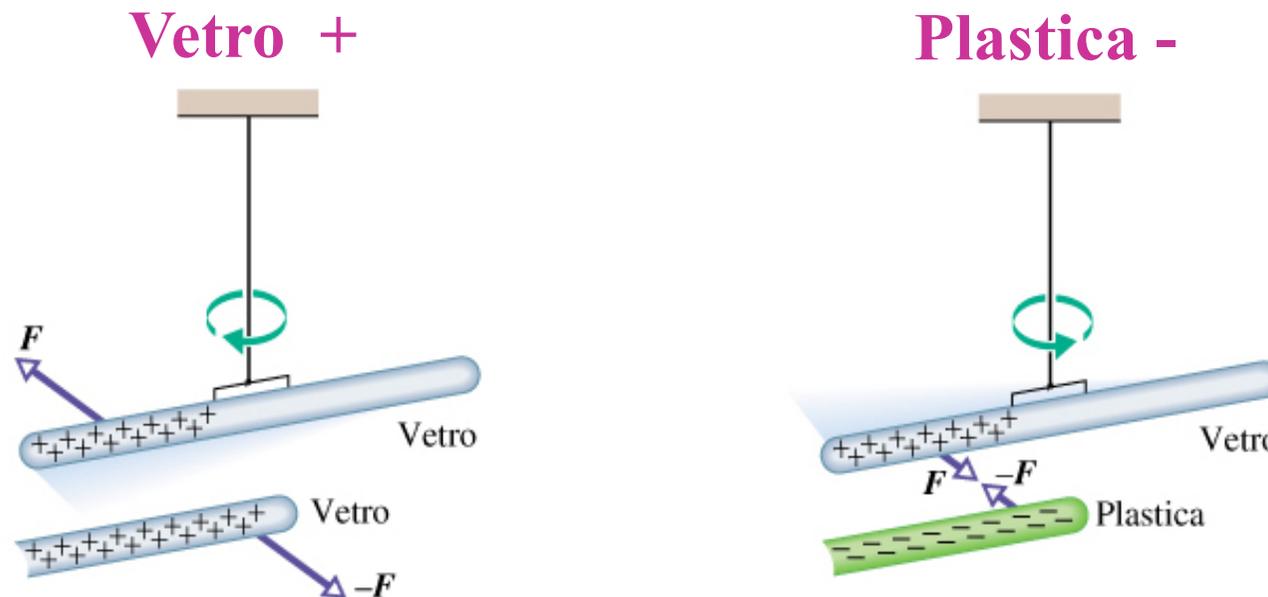
Fenomeni elettrici

1820 **H.C. Oersted** connessione tra elettricità e magnetismo

M. Faraday sperimentale puro, non scrive formule

1850 **J.C. Maxwell** formalizza le idee di Faraday

I greci avevano osservato che l'**ambra** (elektron) aveva delle caratteristiche particolari se strofinata con una pelliccia, il **vetro** presentava le stesse caratteristiche se strofinato con seta

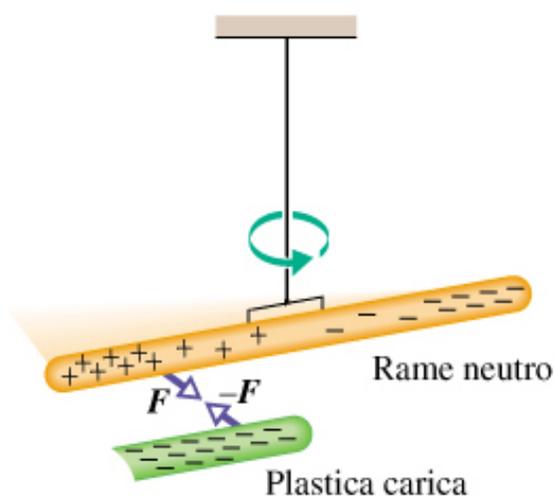


Interazione elettrica ha un **duplice aspetto** (+ e -) a differenza di quella gravitazionale

Due corpi che possiedono lo stesso tipo di elettrizzazione (+ o -) si respingono, mentre si attraggono se possiedono tipi di elettrizzazione diversi (uno + e l'altro -)

Interazione gravitazionale molto meno intensa di quella elettrica

vediamo l'interazione gravitazionale solo perché quella elettrica, avendo una duplice natura, di solito dà origine a corpi neutri



I materiali possono essere suddivisi in

conduttori (rame)

isolanti (plastica)

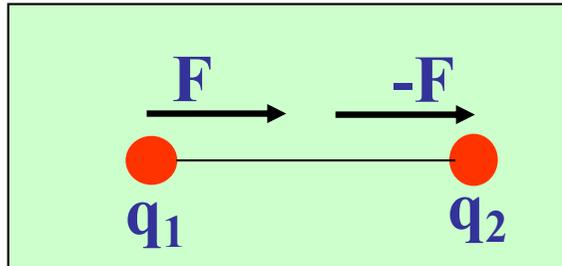
Nei conduttori le cariche (**elettroni di conduzione**) sono libere di muoversi

Carica indotta

semiconduttori (ad es. Si e Ge)

superconduttori (non presentano resistenza)

La carica elettrica è responsabile della **forza elettrica**, così come la massa lo è della forza gravitazionale



Misuro F esercitata su q_1 e $-F$ esercitata su q_2

Se un sistema è isolato la sua carica totale rimane costante:

principio di conservazione della carica elettrica (B. Franklin)

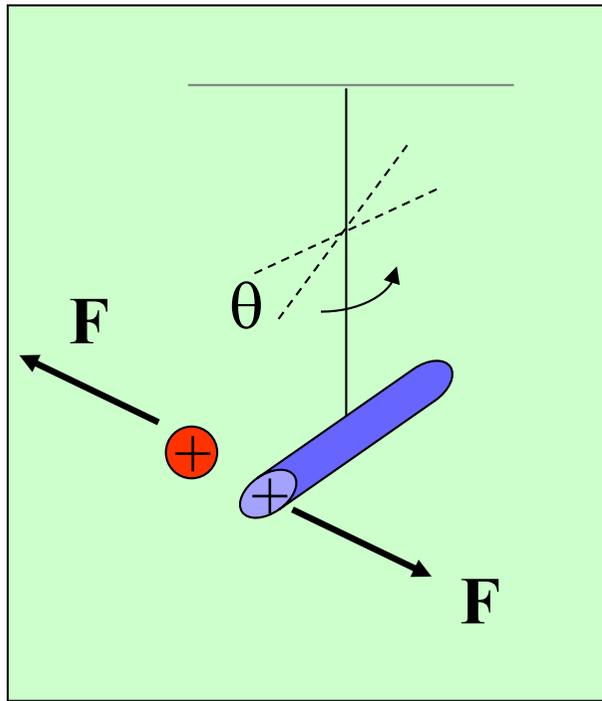
Elettrostatica: studio dell'interazione tra due cariche elettriche a riposo (o al più in moto con v molto piccola) in un sistema inerziale

Legge di Coulomb (1785)

L'interazione elettrostatica tra due particelle cariche è proporzionale alle loro cariche ed è inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra di esse; la direzione della forza è quella della linea congiungente le cariche stesse

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r$$

La **costante k** prende il nome di **costante elettrostatica** e il suo valore dipende dalle unità di misura utilizzate



Utilizzando una bilancia di torsione posso misurare F . Non conosco il valore della carica allora **fisso k in modo arbitrario**

$$k = 10^{-7} c^2 = 8.9874 \cdot 10^9 \approx 9 \cdot 10^9 \quad (c = \text{velocità della luce})$$

In questo modo la **carica di 1 C** è definita come la carica che, posta ad 1 m da una carica uguale nel vuoto, viene respinta con una forza di $8.9874 \cdot 10^9 \text{ N}$

$$[k] = Nm^2C^{-2} \text{ o } kgm^3C^{-2}$$

Per praticità si pone

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{ con}$$

$$\epsilon_0 = \text{permeabilità del vuoto} = \frac{10^7}{4\pi c^2} = 8.854 \cdot 10^{-12} N^{-1}m^{-2}C^{-2}$$

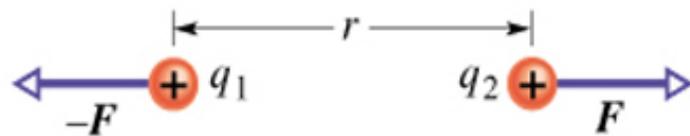
q_1 e q_2 vanno inserite con **il loro segno**

$F < 0$ forze attrattive e q di segno opposto

$F > 0$ forze repulsive e q dello stesso segno

$F_{12} = -F_{21}$ q_1 e q_2 esercitano una sull'altra una forza di modulo uguale e verso opposto, F_{12} e F_{21} sono una **coppia di azione e reazione**

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{u}_r$$



(a) Repulsione



(b) Repulsione



(c) Attrazione

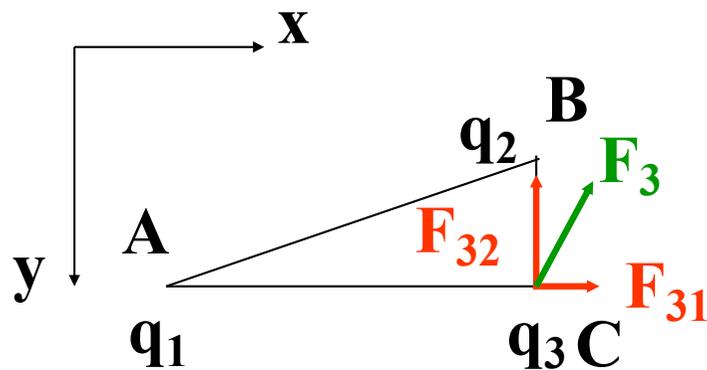
Unità di misura della **carica elettrica** deriva da quella della corrente (Ampere): **1C** è la quantità di carica che passa in un secondo attraverso una qualsiasi sezione di un filo percorso da una corrente di 1 A

$$dq = idt$$

La forza elettrostatica **F** è **additiva** (principio di sovrapposizione):

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \dots + \vec{F}_{1n}$$

Esempio



$$q_1 = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

$$q_2 = -0.5 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

$$q_3 = 0.2 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

$$AC = 1.2 \text{ m} = r_1$$

$$BC = 0.5 \text{ m} = r_2$$

$$F_3 = ?$$

$$|\vec{F}_{32}| = k \frac{q_2 q_3}{r_2^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{0.5 \cdot 10^{-3} \cdot 0.2 \cdot 10^{-3}}{0.5^2} = 3.6 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$\vec{F}_{32} = -3.6 \cdot 10^3 \vec{j} \text{ N}$$

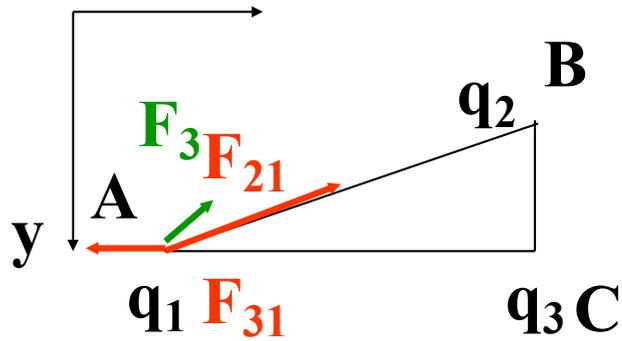
$$|\vec{F}_{31}| = k \frac{q_1 q_3}{r_1^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{1.5 \cdot 10^{-3} \cdot 0.2 \cdot 10^{-3}}{1.2^2} = 1.875 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$\vec{F}_{31} = 1.875 \cdot 10^3 \vec{i} \text{ N}$$

$$|F_3| = \sqrt{F_{31}^2 + F_{32}^2} = 4.06 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$\text{tg} \theta = \frac{F_{32}}{F_{31}} = -\frac{3.6}{1.875} = -1.92 \Rightarrow \theta = -62.5^\circ$$

Effetto netto su carica q_1 ?



$$|\vec{F}_{31}| = k \frac{q_1 q_3}{r_2^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{1.5 \cdot 10^{-3} \cdot 0.2 \cdot 10^{-3}}{1.2^2} = 1.9 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$\vec{F}_{31} = -1.9 \cdot 10^3 \vec{j} \text{ N}$$

$$|\vec{F}_{21}| = k \frac{q_1 q_2}{r_1^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{0.5 \cdot 10^{-3} \cdot 1.5 \cdot 10^{-3}}{1.2^2 + 0.5^2} = 4.0 \cdot 10^3 \text{ N}$$



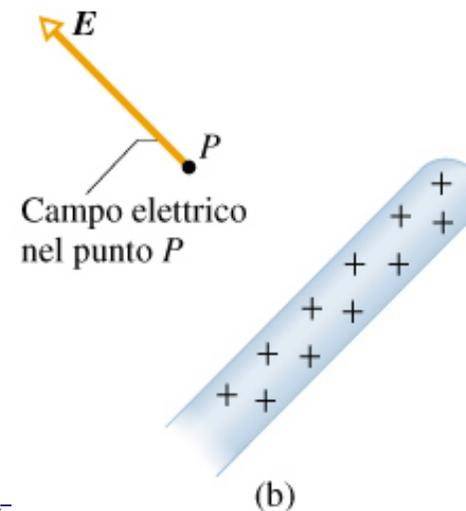
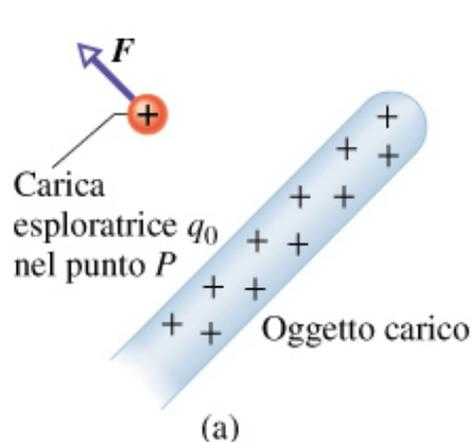
Il campo elettrico

Ogni regione dello spazio in cui una carica elettrica sia soggetta ad una forza elettrostatica è detta **campo elettrico** (dovuto alle cariche presenti)

q_0 carica di prova q_1, q_2, \dots, q_n cariche che generano il campo

q_0 risente del campo generato dalle n cariche (vale anche per le n cariche, ma non è un fatto rilevante per il discorso che stiamo facendo)

$$F_1 \propto q_0, F_2 \propto q_0, F_3 \propto q_0, \dots, F_n \propto q_0 \Rightarrow F_{Tot} \propto q_0$$

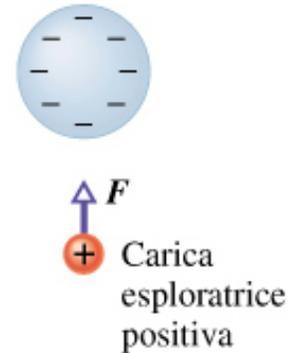


Per valutare se siamo in **presenza di un campo elettrico** in una certa zona dello spazio, la esploriamo con una **carica piccola** detta **carica di prova** o **carica esploratrice** e **misuriamo la forza** che agisce su di essa

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \text{ oppure } \vec{F} = q_0 \vec{E} \quad \vec{E} \parallel \vec{F} \text{ se } q_0 > 0$$

[E] : **intensità del campo elettrico** è la forza che agisce sulla carica unitaria posta in quel punto

$$[E] = N \cdot C^{-1} \text{ oppure } kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot C^{-1}$$



Il campo elettrico è un campo vettoriale

Il campo elettrico non dipende dalla carica di prova

L'effetto del campo elettrico sulle cariche è di spostarle verso zone diverse \Rightarrow **polarizzazione**

Per **il campo elettrico** vale il **principio di sovrapposizione**

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i}$$

Sia q_0 la carica esploratrice, a distanza r da q (che genera il campo elettrico) si ha

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \vec{u}_r = q_0 \vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r \quad \forall \text{ punto dello spazio}$$

Alcuni valori di campo elettrico

Campo	Valore (N/C)
Sulla superficie di un nucleo di uranio	$3 \cdot 10^{21}$
In un atomo di idrogeno, a un raggio di $5.29 \cdot 10^{-11}$ m	$5 \cdot 10^{11}$
Minimo valore per la scarica elettrica in aria	$3 \cdot 10^6$
Sul rullo carico di una fotocopiatrice	10^5
Vicino a un pettine di plastica caricato	10^3
Nella bassa atmosfera	10^2
All'interno di un filo di rame in circuiti elettrici domestici	10^{-2}

Esempio 17.1

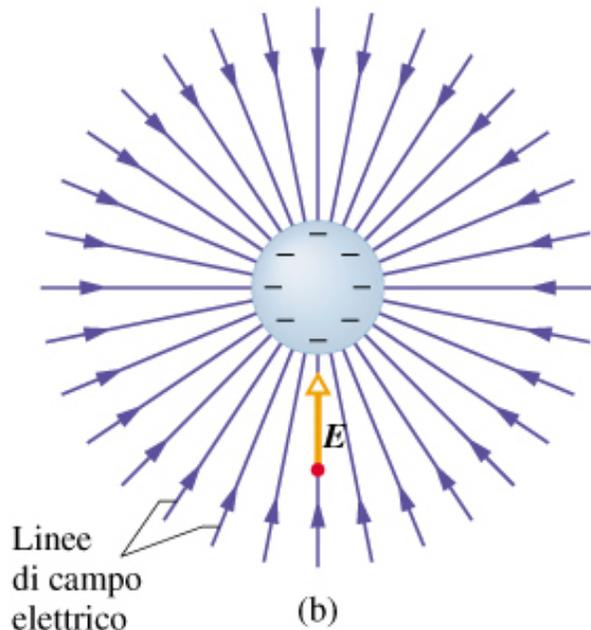
2 protoni nel nucleo si respingono
con la forza:

$$q = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$r = 10^{-15} \text{ m}$$

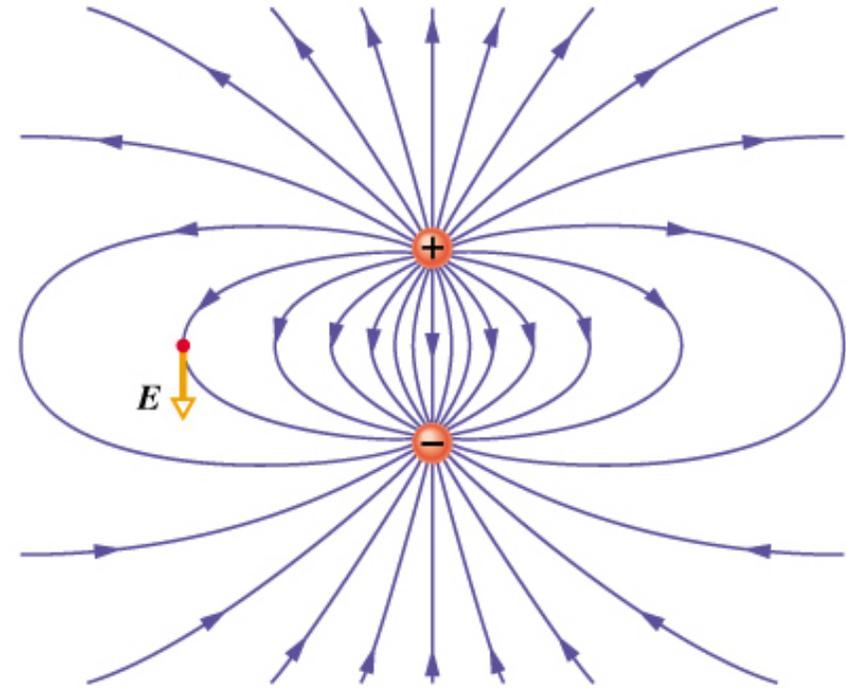
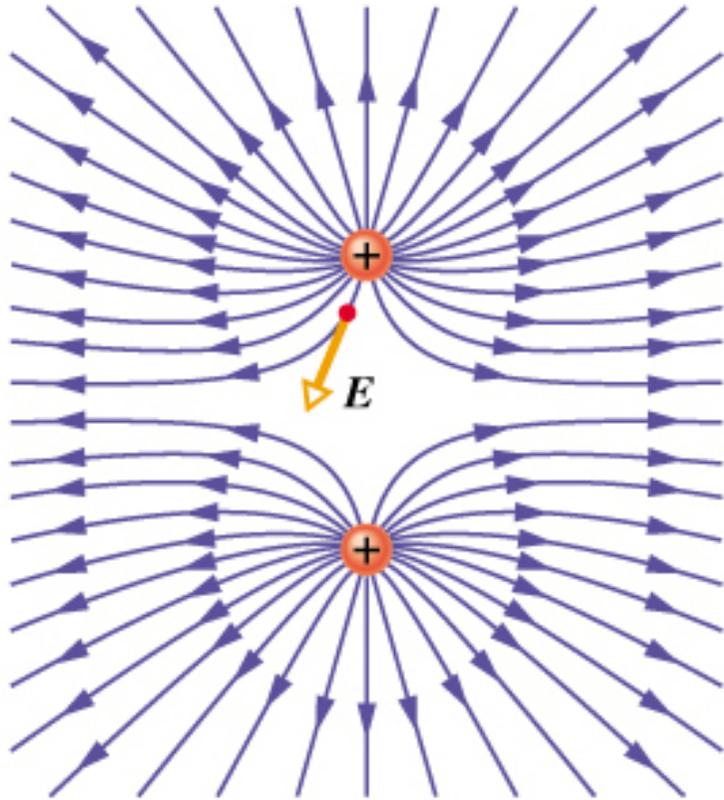
$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} = \frac{(1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{4\pi \cdot 8.86 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}} = 2.3 \cdot 10^2 \text{ N}$$

Linee di Forza

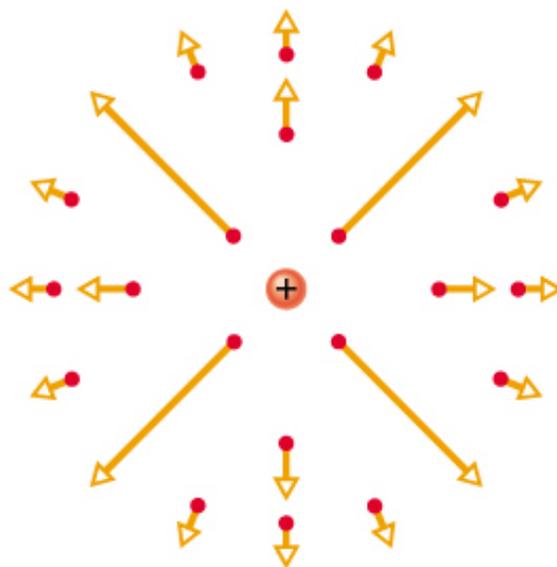


- In ogni punto le linee di forza sono **tangenti** alla direzione del campo elettrico in quel punto
- Si determinano usando una **carica di prova positiva**
- **Escono** dalle cariche + ed **entrano** in quelle –
- Sono tracciate in modo che il **numero di linee** che attraversano una superficie unitaria \perp ad esse è \propto **all'intensità del campo elettrico E**

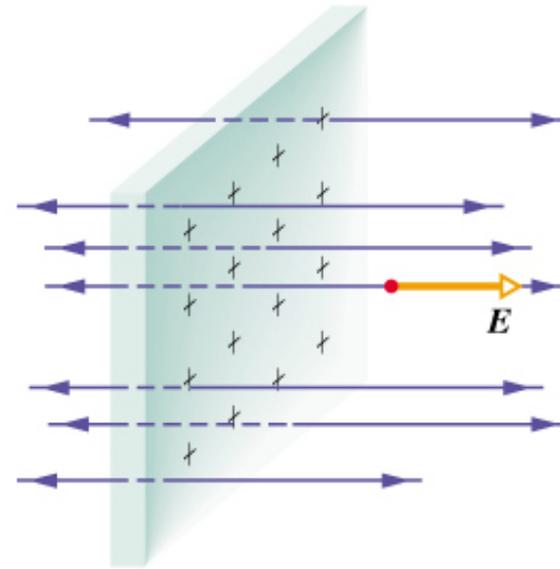
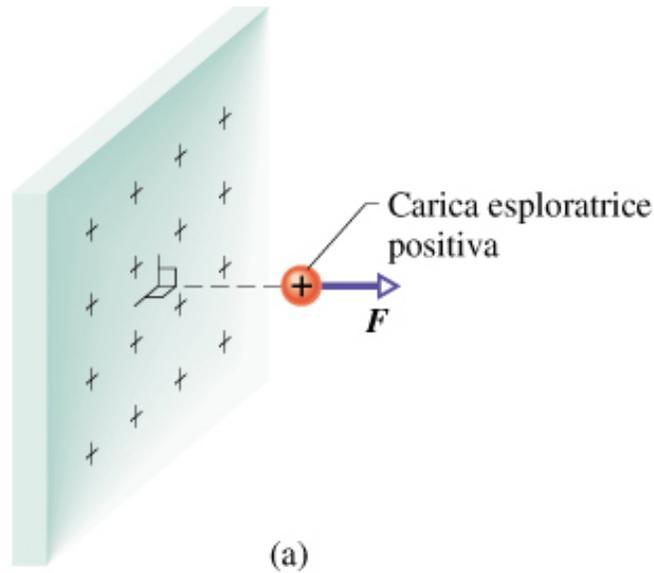
linee si addensano \Rightarrow E è grande
linee si diradano \Rightarrow E è piccolo



Dipolo elettrico



Vettori campo elettrico nello spazio attorno ad una **carica puntiforme positiva**



Lamina non conduttrice infinita

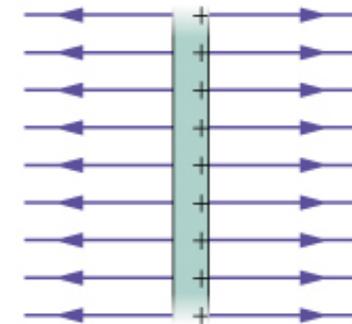
Distribuzione uniforme di cariche +
da un lato

Forza netta \perp al piano uscente dal piano

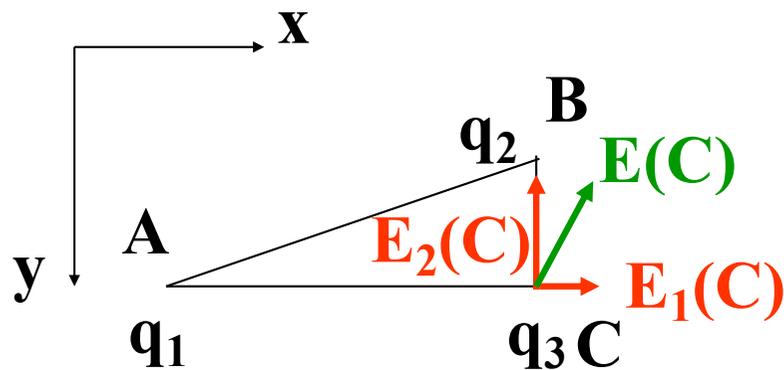
Piano infinito e distribuzione di carica

uniforme \Rightarrow vettori campo elettrico hanno
tutti la stessa intensità

Campo elettrico uniforme



Esempio



$$q_1 = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

$$q_2 = -0.5 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

$$q_3 = 0.2 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

$$AC = 1.2 \text{ m} = r_1$$

$$BC = 0.5 \text{ m} = r_2$$

$$E(C) = ?$$

$$F_3 = 4.06 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$E_3 = \frac{F_3}{q_3} = 2.03 \cdot 10^7 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

E_3 è il campo in cui si trova q_3 che qui equivale alla carica di prova

oppure

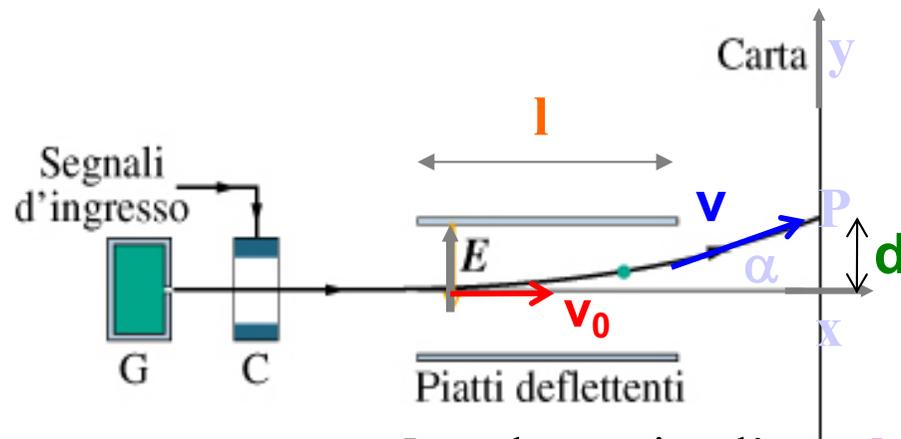
$$E_1(C) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} = 9.37 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

$$E_2(C) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = -18 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

$$E(C) = \sqrt{E_1^2(C) + E_2^2(C)} = 2.03 \cdot 10^7 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1} = E_3$$

E_1 ed E_2 sono i campi generati da q_1 e q_2 in C

Moto di carica in Campo Elettrico



$$\vec{F} = m\vec{a} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

Il rapporto tra q ed m determina l'**accelerazione** cui è sottoposta la particella di carica q e massa m ; se il campo elettrico **E è uniforme**,

l'accelerazione a risulta costante e quindi la traiettoria seguita dalla particella è una **parabola**. Supponiamo che la particella entri nella zona in cui c'è campo elettrico con velocità \mathbf{v}_0 diretta orizzontalmente da sx verso dx , sia inoltre $\mathbf{v}_0 \perp \mathbf{E}$, indichiamo infine con \mathbf{v} la **velocità della particella in uscita dal campo elettrico**, con α l'**angolo di deflessione** della stessa rispetto all'asse delle x , con \mathbf{d} la **distanza dall'asse delle x del punto P in cui la particella colpisce lo schermo** e con **l la lunghezza dei piatti deflettenti**.

Dalla cinematica sappiamo che

$$x = v_0 t \quad y = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{m} \right) E t^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{m} \right) \left(\frac{E}{v_0^2} \right) x^2$$

Abbiamo così verificato che la traiettoria è una parabola

$$\frac{dy}{dx} \Rightarrow \text{angolo di deflessione } \alpha \text{ (per } x = a)$$

$$\text{tg} \alpha = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = \frac{q}{m} \frac{E}{v_0^2} l$$

Se la deviazione all'uscita dai piatti deflettenti è piccola, ovvero se lo schermo è sufficientemente lontano, possiamo scrivere

$$\text{tg} \alpha = \frac{d}{L} \Rightarrow \frac{qEl}{mv_0^2} \cong \frac{d}{L}$$

I tubi a raggi catodici e gli oscilloscopi sono basati su queste proprietà

Il Potenziale Elettrico

Forza elettrica è centrale \Rightarrow **conservativa** \Rightarrow **energia potenziale elettrica U**. Potenziale elettrico in un punto è l'**energia potenziale posseduta da una carica unitaria** posta in quel punto

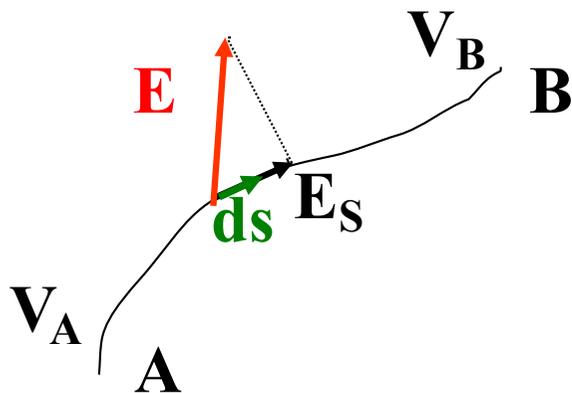
$$V = \frac{U}{q} \quad U = qV \quad [V] = \text{volt} \quad V = \text{m}^2\text{kg s}^{-2}\text{C}^{-1}$$

Il potenziale è una caratteristica del campo e non della carica

Il potenziale, come U, è definito a meno di una **costante arbitraria**:

poniamo **$V = 0$ per $r = \infty$**

q si muove da A verso B lungo la curva e attraversa una regione in cui c'è **campo elettrico E**



$$U_A - U_B = q(V_A - V_B)$$

$$U_A - U_B = -\Delta U = W_{A \rightarrow B} \quad \text{lavoro fatto sulla carica}$$

$$W_{A \rightarrow B} = -q(V_B - V_A) = -q\Delta V$$

$$q\Delta V = \Delta U$$

Convenzione: $\Delta U = U_{\text{finale}} - U_{\text{iniziale}}$

Pertanto troviamo

$$W_{A \rightarrow B} = q(V_A - V_B)$$

differenza di potenziale elettrico

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = V_A - V_B$$

Possiamo anche definire il potenziale come il **lavoro fatto** dal campo elettrico per portare la **carica di prova** dall'infinito al punto in cui si misura V , $V = (-W_\infty/q)$

Lungo un **percorso chiuso**, dato che il campo è conservativo, abbiamo

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

In generale, lungo un percorso qualunque se \mathbf{E}_S è la componente del campo lungo il percorso, si ha

$$\int_A^B E_S ds = V_A - V_B = -(V_B - V_A) = -\int_A^B dV$$

Il **verso del campo elettrico** è quello in cui **V** **decrece**

Ipotesi, $E = \text{costante}$. Se mi sposto da x_1 ad x_2 (con $x_2 > x_1$) ho

$$V_1 = -Ex_1 \quad V_2 = -Ex_2$$

$$V_2 - V_1 = -E(x_2 - x_1) \quad d = (x_2 - x_1)$$

$$E = -\frac{V_2 - V_1}{d} = \frac{V_1 - V_2}{d} \quad [E] = Vm^{-1} = NC^{-1}$$

Notiamo che

- se $V_1 - V_2 > 0 \Rightarrow \mathbf{E}$ va da x_1 a x_2
- se $V_1 - V_2 < 0 \Rightarrow \mathbf{E}$ va da x_2 a x_1

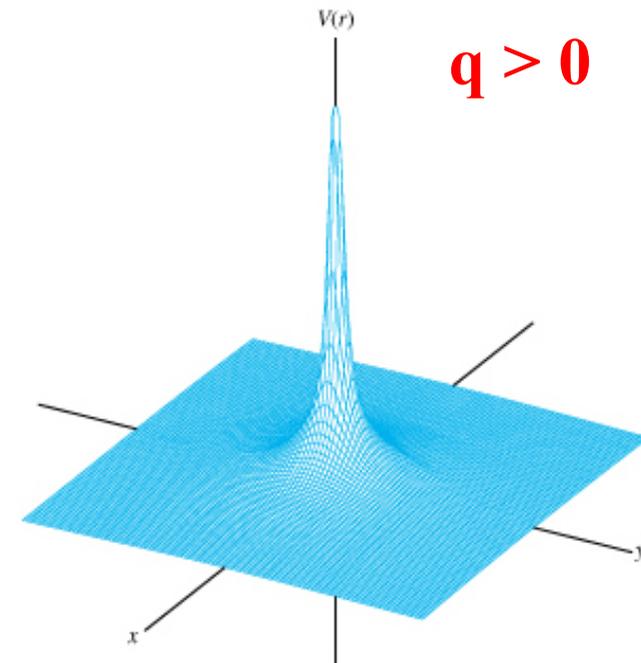
Consideriamo ora una **carica puntiforme q** sorgente del **campo E**

$$E = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\frac{dV}{dr}$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = -\int_V^0 dV \quad V = 0 \text{ per } r = \infty$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad V > 0 < 0 \text{ a seconda della carica}$$



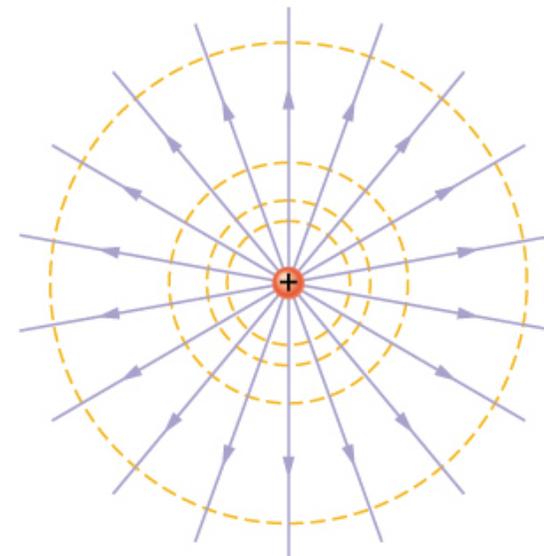
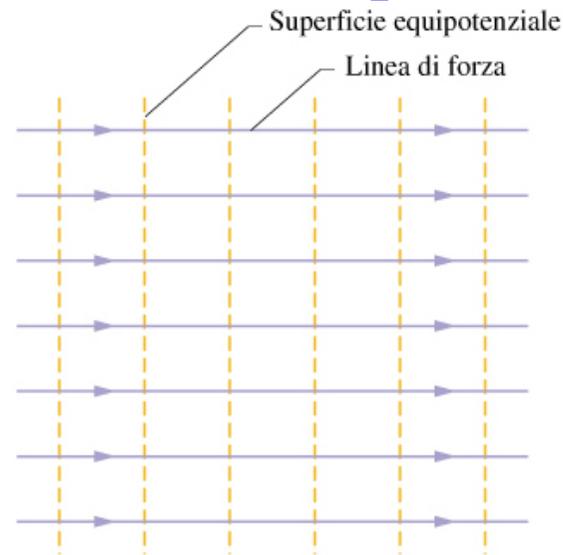
Il potenziale V è **additivo**, pertanto se ho più cariche, ottengo

$$V = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \dots + \frac{q_n}{4\pi\epsilon_0 r_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$

Le superfici per cui è $V = \text{costante}$ sono **superfici equipotenziali**, E è sempre \perp ai punti di una **superficie equipotenziale** (il **lavoro** per muoversi su una superficie equipotenziale è **nullo**)

Se E è **uniforme**, allora $V = \text{costante} \Rightarrow x = \text{costante} \Rightarrow$ **superfici equipotenziali sono dei piani**

Se E è generato da una **carica puntiforme** \Rightarrow **superfici equipotenziali sono delle sfere**



Consideriamo ora **l'energia totale** di una particella di massa **m** e carica **q** in una zona in cui è presente un **campo elettrico E**

$$E_{TOT} = E_K + U = \frac{1}{2}mv^2 + qV$$

Dato che non ci sono forze dissipative, quando la particella si muove dalla posizione 1 alla 2 abbiamo, per il **principio di conservazione dell'energia**

$$\begin{aligned} E_{TOT}(1) &= E_{TOT}(2) \\ \frac{1}{2}mv_1^2 + qV_1 &= \frac{1}{2}mv_2^2 + qV_2 \\ \Delta E_{K_{12}} = W_{1 \rightarrow 2} &= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad ; \quad W_{1 \rightarrow 2} = q(V_1 - V_2) \\ \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 &= q(V_1 - V_2) \end{aligned}$$

Volt = variazione di potenziale elettrico che una carica di 1 C deve effettuare per aumentare la propria energia di 1 J

q > 0 E_K aumenta spostandosi verso V inferiori

q < 0 E_K aumenta spostandosi verso V superiori

Se $v_1 = 0$ e in 2 è $V_2 = 0$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = qV_1 \Rightarrow \text{principio su cui si basano gli acceleratori elettrostatici}$$

$$1 \text{ eV} = (1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}) (1 \text{ V}) = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$E_e = m_e c^2 = 8.1867 \cdot 10^{-14} \text{ J} = 0.511 \text{ MeV}$$

$$E_p = m_p c^2 = 1.5032 \cdot 10^{-10} \text{ J} = 938.26 \text{ MeV}$$

$$E_n = m_n c^2 = 1.5053 \cdot 10^{-10} \text{ J} = 939.55 \text{ MeV}$$

Esercizio 17.5 Fulmine percorre 1 km dalla nuvola all'albero. Quanto vale ΔV ?

(si assuma: - E=costante,

- l'aria, inizialmente scarica, diventa conduttrice quando $E=8 \times 10^5 \text{ Vm}^{-1}$)

$$E = \frac{\Delta V}{R} \text{ Volt/m}, \Delta V = R \cdot E = 1000 \cdot 8 \cdot 10^5 \text{ V} = 8 \cdot 10^8 \text{ V}$$

Energia del fascio di protoni del CERN: $13 \text{ TeV} \cdot 3000 \text{ bunches} \cdot 10^{11} \text{ protons} = 4 \cdot 10^{27} \text{ eV}$
 $= 640 \text{ MJoule}$ (treno di 400 ton a 200 km/h = 617 MJoule)

Confronto tra forze elettriche e gravitazionali: sfera di plastica di massa 15 mg carica a -10 nC sopra un tavolo, a 1 cm sopra il tavolo sta fissata una biglia di vetro e carica 10 nC. La biglia di plastica inizierà a sollevarsi ?

$$F_{1su2} = k \frac{q_1 q_2}{R^2} N = -9 \cdot 10^9 \frac{10 \cdot 10^{-9} \cdot 10 \cdot 10^{-9}}{(0.01)^2} N = -9 \cdot 10^{-3} N$$

$$F_{grav} = mg = 15 \cdot 10^{-6} \cdot 9.8 N = 1.5 \cdot 10^{-4} N$$

Forza elettrica 60 volte più grande, quindi la biglia salirà verso l'alto

Note sull'energia potenziale

Analizziamo ora **l'energia potenziale** associata ad un **sistema di più cariche**. Fino a qui abbiamo parlato di U solo per una carica q che si trova in un campo elettrico \mathbf{E} generato da altre cariche, ora ci chiediamo invece qual è **l'energia potenziale del sistema di cariche che genera il campo**.

Costruiamo il nostro sistema di cariche, prendendo ciascuna carica e portandola **dall'infinito alla sua posizione finale**, (le cariche sono in quiete sia all'infinito che nella posizione finale f)

$$-\Delta U = -(U_f - U_\infty) = W_{\infty \rightarrow f}$$

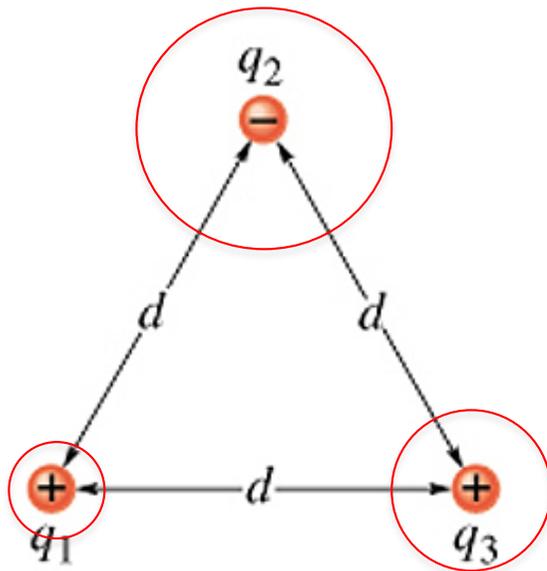
Il sistema più semplice è quello costituito da **due cariche q_1 e q_2** .

Prendiamo la carica q_1 e la portiamo dall'infinito alla sua posizione finale f_1 , per fare questo **non variamo alcuna energia potenziale** in quanto non abbiamo ancora un campo elettrico e quindi non facciamo lavoro

Prendiamo ora la carica q_2 che si trova in quiete all'infinito e la portiamo alla posizione finale f_2 situata ad una **distanza r** da q_1 . Abbiamo bisogno di applicare una forza $\mathbf{F} = -q_2\mathbf{E}$ che compia il lavoro L necessario a costruire il sistema, al termine del processo il sistema ha ricevuto energia (il lavoro fatto) e l'ha immagazzinata sotto forma di energia potenziale

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} = q_2 V$$

Esempio



Vogliamo determinare l'energia potenziale elettrostatica del sistema di cariche rappresentato in figura

$$d = 12 \text{ cm}, q_1 = +q, q_2 = -4q, q_3 = +2q, q = 150 \text{ nC}$$

Sappiamo già che per posizionare la carica q_1 non dobbiamo compiere alcun lavoro, quindi **portiamo la carica q_2 a distanza d da q_1**

$$W_{12} = U_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d}$$

Prendiamo ora q_3 e la portiamo **a distanza d sia da q_1 che da q_2** , per fare ciò dobbiamo compiere **due lavori** in quanto abbiamo due campi, quello generato da q_1 e quello generato da q_2 , pertanto

$$W = W_{13} + W_{23} = U_{13} + U_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{d} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{d}$$

L'energia potenziale elettrostatica del sistema così costruito sarà la **somma delle energie elettrostatiche accumulate nel sistema** durante la sua costruzione

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{d} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{d}$$

$$U = \frac{-10 q^2}{4\pi\epsilon_0 d} = -9 \cdot 10^9 \frac{10(150 \cdot 10^{-9})^2}{0.12} = -17 \text{ mJ}$$

L'energia potenziale elettrostatica **negativa** indica che il sistema si rompe solo se **dall'esterno gli si fornisce un'energia** pari a 17 mJ, si dice anche che il **sistema è legato**

L'energia potenziale elettrostatica così calcolata **non dipende dall'ordine** con cui vengono considerate le cariche, ma **solo dalle interazioni fra le coppie di cariche**, interazioni che vanno considerate **una volta sola per coppia**.

L'energia potenziale elettrostatica appartiene al sistema di cariche

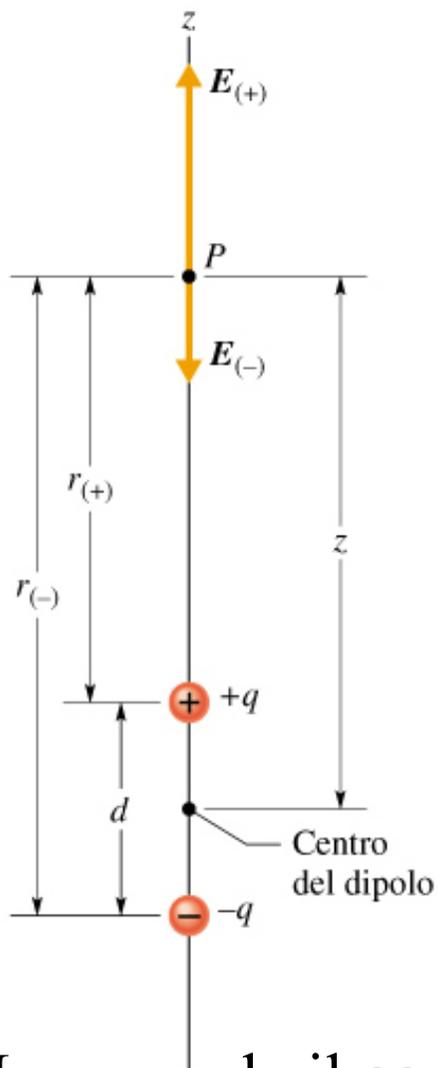
$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Il dipolo elettrico

Vogliamo calcolare il campo in P creato dalle cariche +q e -q uguali in modulo.

Esso sarà la somma di \mathbf{E}_+ ed \mathbf{E}_- , entrambi in direzione z



$$E_{dipolo} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_-^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{(r_+ + d)^2} \right)$$

$$E_{dipolo} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(r_+ + d)^2 - r_+^2}{r_+^2 (r_+ + d)^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2r_+ d + d^2}{r_+^2 (r_+ + d)^2} \right)$$

$$E_{dipolo} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2d}{z^3} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qd}{z^3} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{z^3} \quad \text{per } r_+ \gg d$$



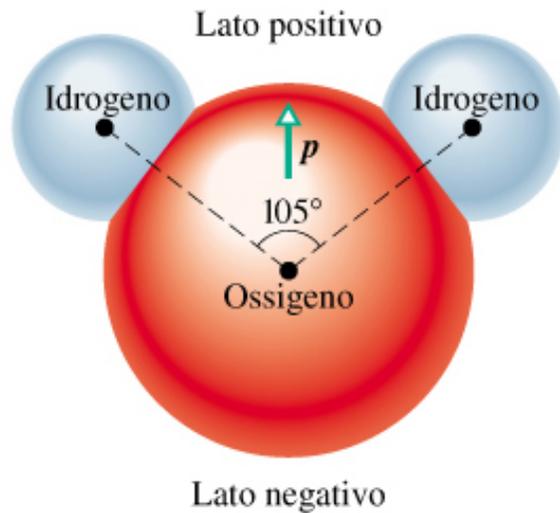
Definiamo **momento di dipolo** la seguente quantità

$$\vec{p} = q\vec{d}$$

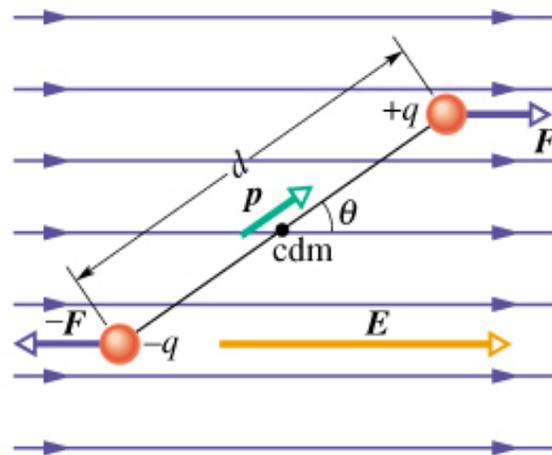
orientato **dalla carica - a quella +**

In generale il **campo elettrico del dipolo** varia come $1/r^3$, dove r è la distanza dal centro del dipolo. Il **campo del dipolo** è **più debole** di quello di una singola carica. Per **punti sull'asse** del dipolo **E e p sono paralleli**

Dipolo in un campo elettrico esterno



Molecola di acqua in un campo elettrico **uniforme esterno E**. La molecola di acqua è un dipolo perché le sue cariche $+q$ e $-q$ sono posizionate rigidamente



In generale i vettori **E** e **p** non sono paralleli, ma formano un **angolo θ** . Dal punto di vista dinamico abbiamo che su q e su $-q$ agisce la forza elettrica dovuta al campo **E**

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad e \quad \vec{F}_{+q} = -\vec{F}_{-q}$$

Globalmente abbiamo

$$\vec{F}_{ris} = 0$$



CM resta fermo

$$\vec{\tau}_{ris} \neq 0$$



il dipolo ruota attorno al CM

$$\vec{\tau}_1 = \frac{\vec{d}}{2} \times \vec{F} \quad \vec{\tau}_2 = \frac{\vec{d}}{2} \times (-\vec{F})$$

$$\tau_1 + \tau_2 = \tau_{ris} = -\frac{d}{2} F \sin \theta - \frac{d}{2} F \sin \theta = -dF \sin \theta$$

$$\tau_{ris} = -qEd \sin \theta = -pE \sin \theta$$

$$\vec{\tau}_{ris} = \vec{p} \times \vec{E}$$



(b)

Il dipolo risente di un **momento torcente** che tende **ad allinearlo ad E**

Energia potenziale di un dipolo elettrico

L'energia potenziale del dipolo risulta **minima** quando $\mathbf{p} \parallel \mathbf{E}$
Arbitrariamente scegliamo $\mathbf{U} = 0$ per $\theta = 90^\circ$

$$W = -\Delta U \quad W = \int \tau d\theta$$

$$\Delta U = U(\theta) - U(90^\circ) = -W = -\int_{90^\circ}^{\theta} \tau d\theta = -\int_{90^\circ}^{\theta} pE \sin \theta d\theta$$

$$\Delta U = -pE \cos \theta$$

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad \text{a meno della costante arbitraria}$$

$$U \text{ minima} \quad \mathbf{p} \parallel \mathbf{E} \quad (\theta = 0) \quad U(0) = -pE$$

$$U \text{ massima} \quad \mathbf{p} \parallel -\mathbf{E} \quad (\theta = 180^\circ) \quad U(180^\circ) = pE$$

In generale si ha

$$W_{\theta_i - \theta_f} = -\Delta U = U(\theta_i) - U(\theta_f)$$

Legge di Gauss

Sfrutta le **simmetrie** che spesso riscontriamo in fisica

Equivale alla legge di Coulomb, l'utilizzo dell'una o dell'altra legge dipende dai casi

Superficie gaussiana: ipotetica superficie **chiusa**

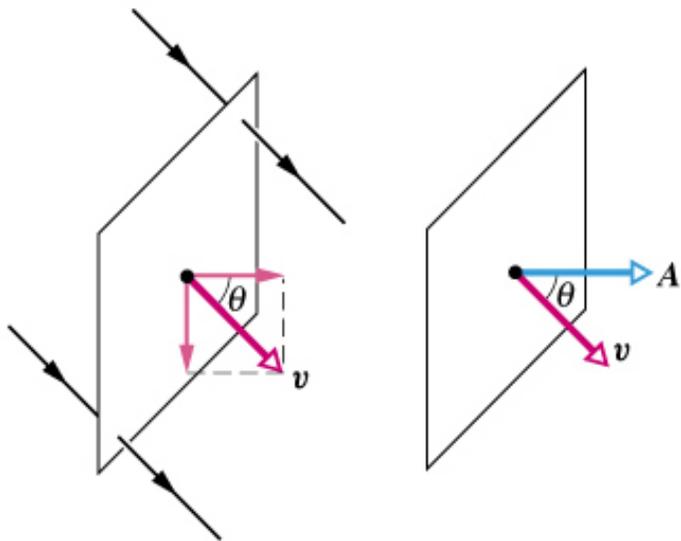
Mette in **relazione** le **cariche all'interno** della superficie chiusa con i **campi elettrici** in tutti i **punti della superficie** stessa

Abbiamo bisogno del **concetto di flusso**

Corrente d'aria con **v uniforme** diretta verso una **spira quadrata di area A**, Φ è il **flusso volumico** (portata volumica) con cui l'aria fluisce attraverso la spira

$$\Phi = (v \cos \theta) A = v A \cos \theta = \vec{v} \cdot \vec{A}$$

Flusso: quantità del campo intercettata dalla superficie



In generale, preso un **campo vettoriale \mathbf{V}** e una **superficie S , orientata** e suddivisa in **superfici infinitesime dS_i** , abbiamo che, ad ogni dS_i corrisponde un **versore \mathbf{u}_{ni}** che orienta la superficie e un **angolo θ_i** tra tale versore e il vettore campo \mathbf{V}

$$dS_1, dS_2, dS_3, \dots, dS_n$$

$$\vec{u}_{n_1}, \vec{u}_{n_2}, \vec{u}_{n_3}, \dots, \vec{u}_{n_n}$$

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n$$

Per definizione il **flusso di \mathbf{V}** è un integrale di superficie dato da

$$\Phi = V_1 dS_1 \cos \theta_1 + V_2 dS_2 \cos \theta_2 + \dots + V_n dS_n \cos \theta_n =$$

$$= \vec{V}_1 \cdot \vec{u}_{n_1} dS_1 + \vec{V}_2 \cdot \vec{u}_{n_2} dS_2 + \dots + \vec{V}_n \cdot \vec{u}_{n_n} dS_n \Rightarrow$$

$$\Phi = \int_S \vec{V} \cdot \vec{u}_n dS$$

Φ può essere **positivo** o **negativo** a seconda del valore di $\cos \theta$, se $\theta = \pi/2$ allora $\Phi = 0$, il vettore campo \mathbf{V} è **tangente** alla superficie S in ogni suo punto; se S è **chiusa**

$$\Phi = \oint_S \vec{V} \cdot \vec{u}_n dS$$

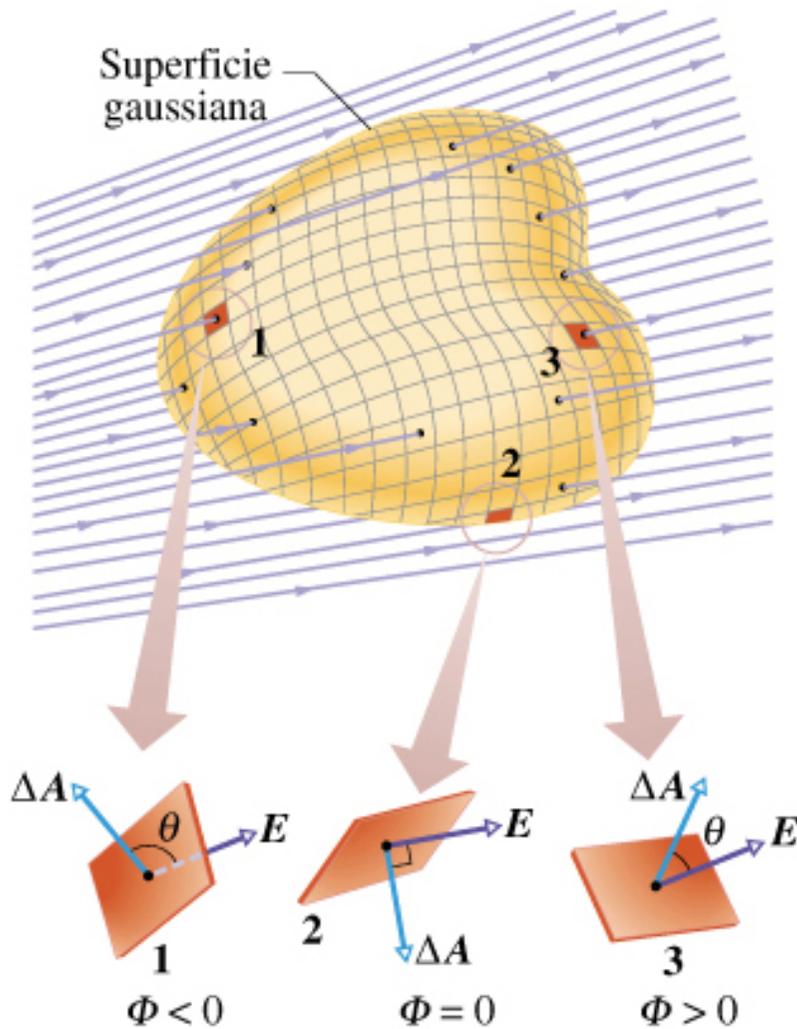
Se ora il **campo vettoriale** è proprio il **campo elettrico E** generato da una carica **q** posta al centro di una **superficie chiusa sferica S**, il suo flusso attraverso detta superficie vale

(ricordiamo che **E** e **u_n** sono sempre **paralleli** in una sfera al cui centro c'è la carica q e che quindi il loro prodotto scalare altro non è che il prodotto dei moduli, inoltre la **superficie S** della sfera vale **4πr²**)

$$\Phi_{\vec{E}} = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{u}_n dS = \oint_S E dS = E \oint_S dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Da quanto sopra ricavato si può notare che **Φ non dipende dal raggio** della sfera, **ma solo dalla carica q** in essa racchiusa

Consideriamo ora una **superficie chiusa qualsiasi** che racchiude la **carica q**



$$\Phi_{\vec{E}} = \oint_S E \cos \theta dS = \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos \theta dS$$

$$\Phi_{\vec{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{1}{r^2} \cos \theta dS$$

Dalla definizione di angolo solido si ha

$$d\Omega = \frac{1}{r^2} \cos \theta dS$$

Pertanto **dΩ** è l'angolo solido infinitesimo sotto cui la superficie **dS è vista dalla carica q**

L'angolo solido attorno ad un punto vale **4π steradiani**, quindi

$$\Phi_{\vec{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\Omega} d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Abbiamo visto che il **flusso del campo elettrico \vec{E}** attraverso una superficie chiusa qualunque **vale sempre q/ϵ_0** , indipendentemente dalla forma della superficie e dalla collocazione della carica q all'interno della superficie stessa

Notiamo inoltre che:

- Se **q è esterno** alla superficie chiusa \Rightarrow **flusso è nullo**
- Se all'interno della superficie ci sono **più cariche** \Rightarrow **flusso = Σ flussi**

Legge di Gauss

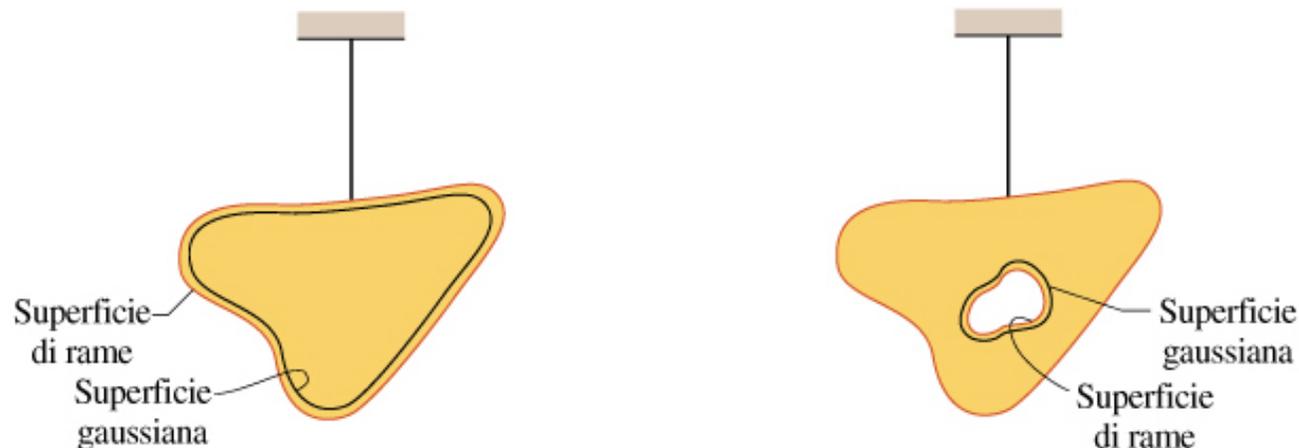
Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa racchiudente le cariche q_1, q_2, \dots, q_n è

$$\Phi_{\vec{E}} = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{u}_n dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

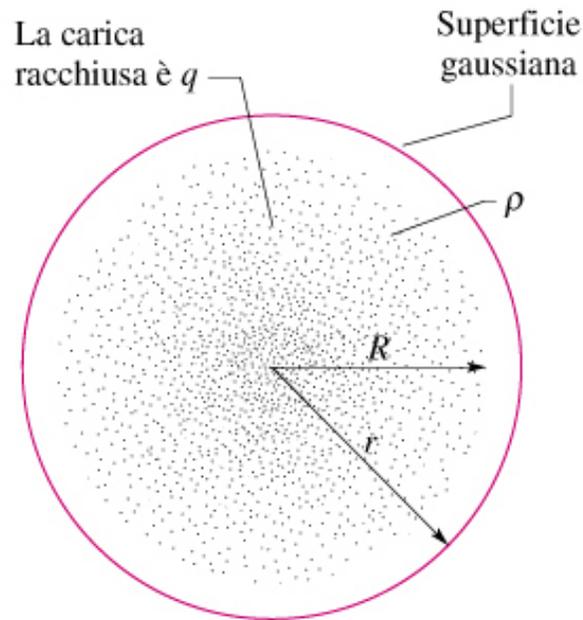
dove $q = q_1 + q_2 + \dots + q_n$ è la carica netta racchiusa all'interno della superficie S

Campo Elettrico in un conduttore

In entrambi i casi se il conduttore è isolato e possiede una **carica totale q** , detta carica **si dispone sulla superficie esterna del conduttore**; se così non fosse infatti ci sarebbe una forza sulle cariche (dovuta al campo elettrico esistente all'interno del conduttore) e si formerebbero delle correnti elettriche nel conduttore. Sperimentalmente si trova che queste correnti non esistono e quindi, in condizioni statiche, **il campo elettrico all'interno di un conduttore carico di forma qualsiasi è nullo e le cariche si dispongono sulla superficie esterna del conduttore**.



Campo elettrico di una distribuzione sferica di cariche



Prendiamo una **sfera di raggio a** con **carica q** , il **campo**, per questioni di simmetria, deve essere **radiale**.

Consideriamo ora una **superficie gaussiana di raggio r concentrica con la prima**, abbiamo

$$\Phi_{\vec{E}} = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{u}_n dS = E \oint_S dS = E4\pi r^2$$

Applichiamo Gauss ed esaminiamo le possibilità al **variare di r**
 $r > a$ la carica **q** è tutta contenuta **nella superficie gaussiana** di raggio r

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

È come se la **carica** fosse **tutta localizzata nel centro** della sfera

$r < a$

- Se la **carica è superficiale** $\Rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{0}$
- Se la **carica è distribuita uniformemente** in tutto il **volume** della sfera q' è la carica contenuta all'interno della superficie gaussiana e vale

$$q' = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{q}{a^3} r^3$$

Quindi

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{qr^3}{a^3} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^3} r$$

Il **campo elettrico** dentro ad una sfera isolante uniformemente carica **varia proporzionalmente ad r**

Infine resta da esaminare cosa succede sulla superficie della sfera

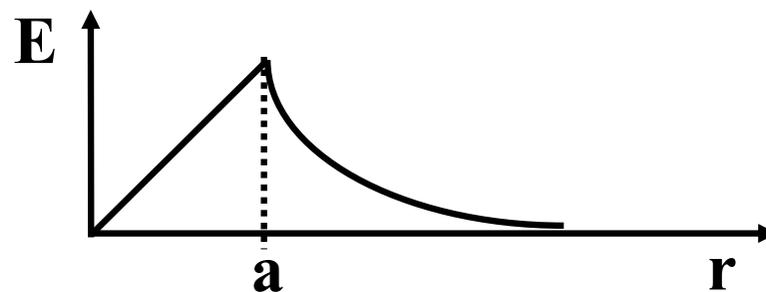
$r = a$

$$E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{a^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2} \quad \text{venendo dall'interno}$$

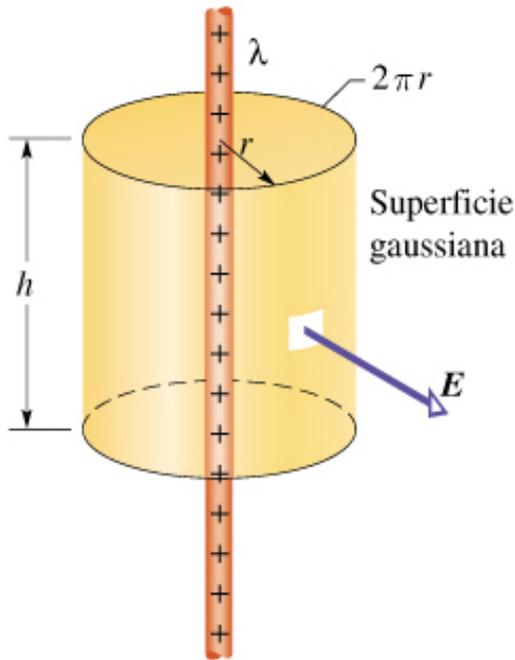
$$E_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2} \quad \text{venendo dall'esterno}$$

I due valori E_+ ed E_- coincidono, quindi il **campo E è continuo** in $r = a$

$r = 0 \Rightarrow E = 0$



Campo elettrico generato da una distribuzione cilindrica di carica di lunghezza infinita



Consideriamo una **distribuzione di carica per unità di lunghezza λ** distribuita uniformemente su un tratto **cilindrico** di altezza **h** e tale che **$q = \lambda h$** ; sia **a** il **raggio del cilindro**. Il **campo elettrico** ha direzione **radiale** per questioni di simmetria e certamente **dipenderà** dalla distanza **r** dall'asse del cilindro. Considero una **superficie cilindrica coassiale** alla superficie carica e con **raggio r** , il flusso attraverso detta superficie vale sempre

$$\Phi_{\vec{E}} = \Phi_{\vec{E}}(B_1) + \Phi_{\vec{E}}(B_2) + \Phi_{\vec{E}}(sup. lat.) = \Phi_{\vec{E}}(sup. lat.)$$
$$\Phi_{\vec{E}}(sup. lat.) = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{u}_n dS = E 2\pi r h$$

Anche in questo caso dobbiamo distinguere vari casi

$r > a$ la carica q è tutta contenuta **nella superficie gaussiana** di raggio r

$$2\pi r h E = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

(caso del **filo infinito** con carica uniforme)

$r < a$

- Se la **carica è superficiale** $\Rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{0}$
- Se la **carica è distribuita uniformemente** in tutto il **volume** del cilindro q' è la carica contenuta all'interno della superficie gaussiana e vale

$$q' = q \frac{\pi r^2 h}{\pi a^2 h} = q \frac{r^2}{a^2} = \lambda h \frac{r^2}{a^2}$$

$$2\pi r h E = \frac{\lambda h r^2}{\epsilon_0 a^2} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a^2} r$$

Il **campo elettrico** dentro ad un cilindro isolante uniformemente carico **aumenta proporzionalmente ad r** (come per la sfera)

Infine resta da esaminare cosa succede sulla superficie del cilindro

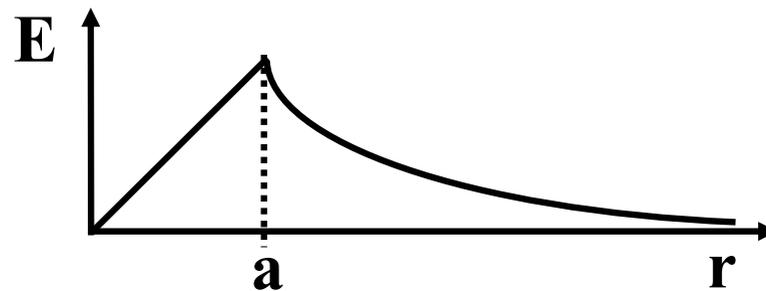
$r = a$

$$E_- = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{a}{a^2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \quad \text{venendo dall'interno}$$

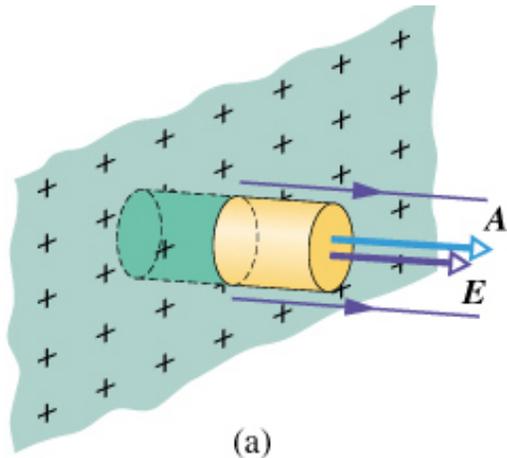
$$E_+ = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \quad \text{venendo dall'esterno}$$

I due limiti coincidono quindi il **campo E è continuo** in $r = a$

$r = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{0}$



Campo elettrico creato da una carica uniformemente distribuita su di un **piano conduttore infinito** ($\sigma > 0$)

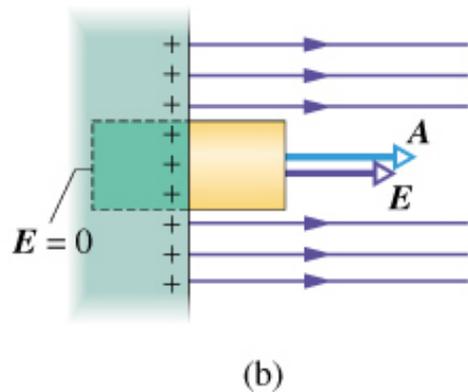


Le linee di forza del campo elettrico sono \perp al piano carico

Prendiamo come superficie gaussiana un cilindro che attraversa la superficie carica ed è \perp ad essa e calcoliamo il flusso totale

$$\Phi_{\vec{E}} = \Phi_{\vec{E}}(S_1) + \Phi_{\vec{E}}(\text{sup. lat.}) = ES + 0$$

$$\Phi_{\vec{E}} = ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \quad q = \sigma S$$

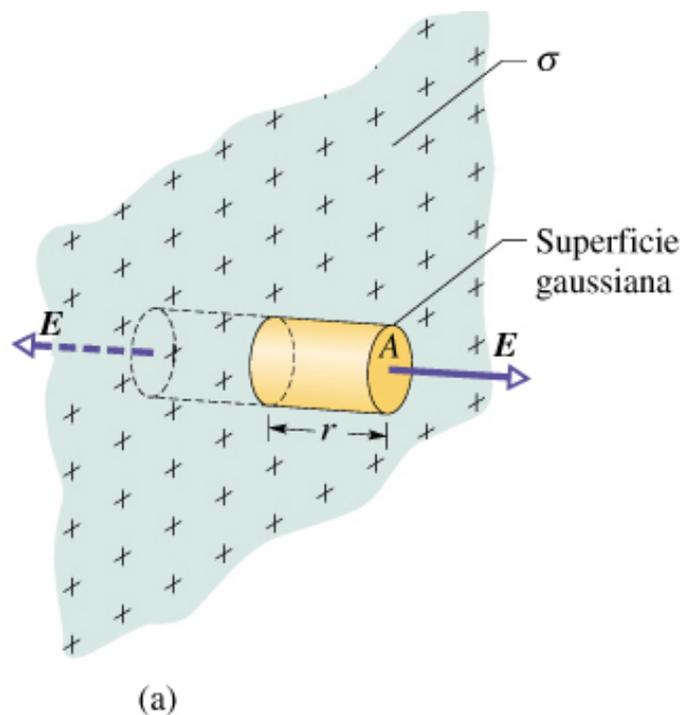


Infine troviamo

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Il **campo elettrico** sulla superficie di un conduttore non dipende dalla distanza dal piano: campo **uniforme**

Consideriamo ora una **lamina infinita isolante** uniformemente carica con densità $\sigma > 0$



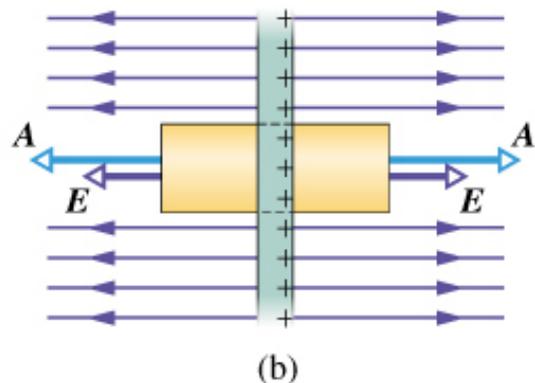
Il campo elettrico è \perp alla lamina ed è uscente
 La superficie gaussiana che consideriamo è sempre un cilindro \perp alla superficie stessa
 Le linee di forza intersecano la superficie gaussiana da una parte all'altra

$$\Phi_{\vec{E}} = \Phi_{\vec{E}}(S_1) + \Phi_{\vec{E}}(S_2) + \Phi_{\vec{E}}(\text{sup. lat.}) = ES + ES + 0$$

$$\Phi_{\vec{E}} = 2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \quad q = \sigma S$$

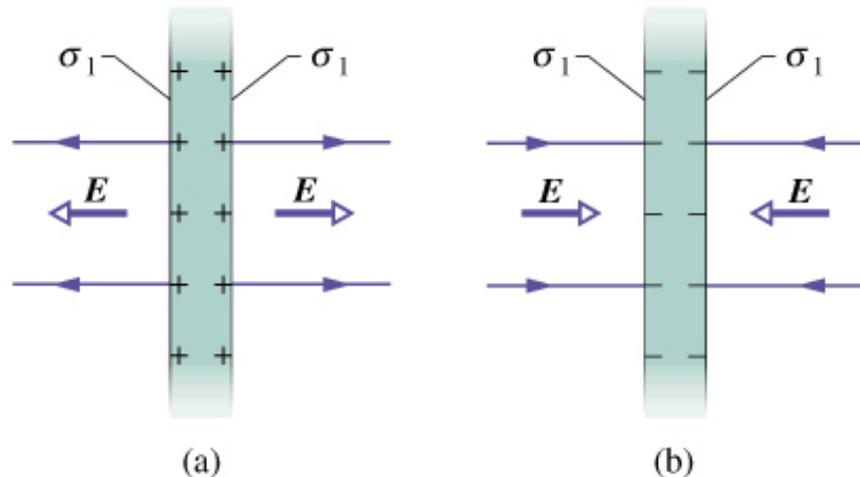
e quindi

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



Il risultato vale per punti a distanza finita dalla lamina

Consideriamo ora **due piastre conduttrici** uniformemente cariche e con **carica opposta** con densità σ , il campo elettrico è nullo all'interno delle due piastre e appena al di fuori di esse vale



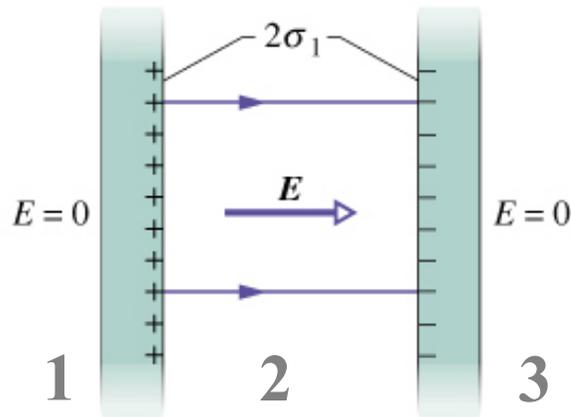
$$E_+ = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{ per la piastra con carica positiva}$$

$$E_- = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{ per la piastra con carica negativa}$$

Notiamo che il campo elettrico è **uscende** dalla piastra con **carica positiva** ed **entrante** nella piastra con **carica negativa**

Se ora **avviciniamo le due piastre** dobbiamo combinare i due campi elettrici

Nella **zona 1** abbiamo



$$E_1 = -E_+ + E_- = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 0$$

Nella **zona 2** troviamo

$$E_2 = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Nella **zona 3** infine è

$$E_3 = E_+ - E_- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 0$$

In conclusione abbiamo creato un **campo elettrico uniforme confinato** nello spazio compreso tra le due lamine conduttrici. Notiamo che passando attraverso una superficie carica il **campo subisce una discontinuità pari a σ/ε_0** , proprietà **sempre valida**

Alcuni tipi di misura di
carica elettrica

Nome	Simbolo	Unità di misura SI
Carica	q	C
Densità di carica lineare	λ	C/m
Densità di carica superficiale	σ	C/m ²
Densità di carica di volume	ρ	C/m ³

$$\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$$

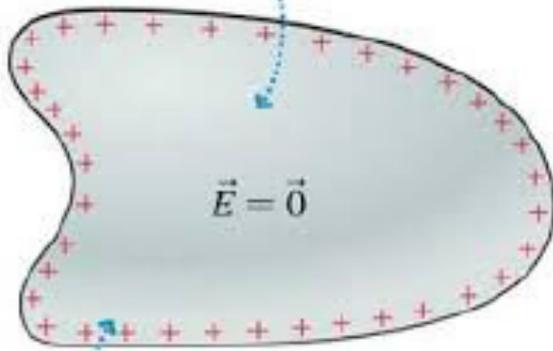
TABELLA 17.1 Costante dielettrica relativa per alcune sostanze

SOSTANZE	ϵ_r	SOSTANZE	ϵ_r
aria	1.000590	dimetilamina	5.26
acqua distillata	81.07	acetone	20.7
alcool etilico	25.8	cloroformio	4.8
vetro	7.0	membrana di assone	9.0

$$\epsilon_r > 1 \Rightarrow E > \text{oppure} < E_0 ?$$

Campo elettrico nei conduttori carichi in equilibrio

(a) The electric field inside the conductor is zero.



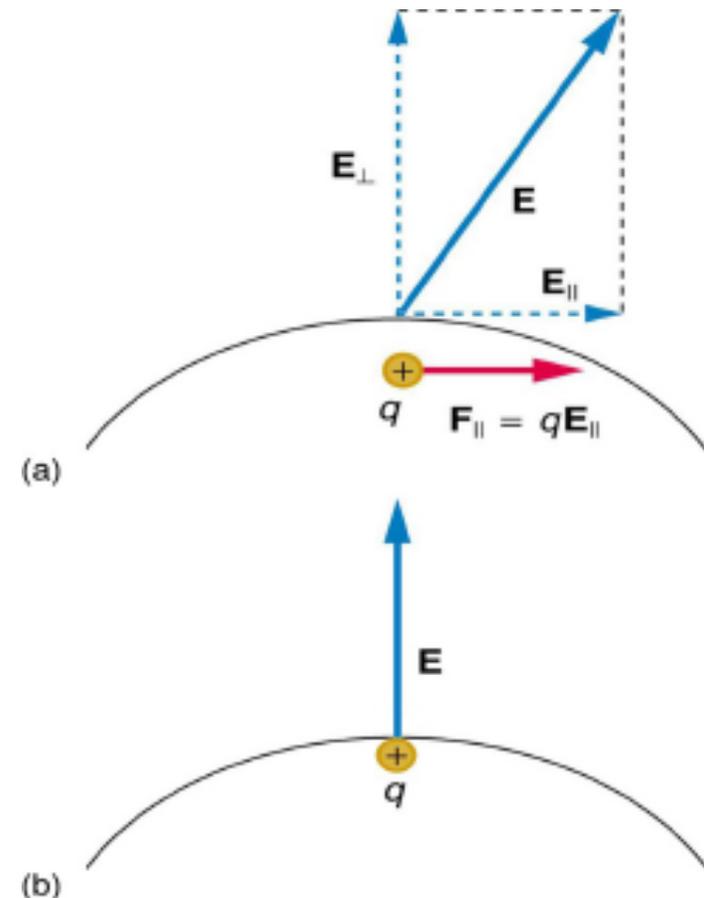
All excess charge is on the surface.

Copyright © 2011 Pearson Education, Inc. Publishing as Pearson Addison-Wesley

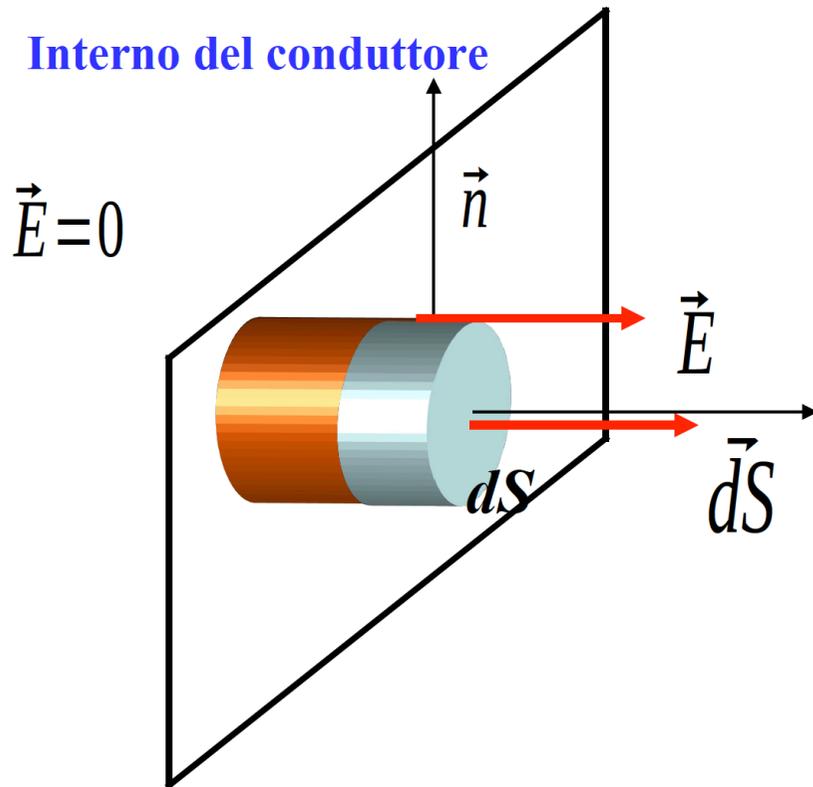
1) In un conduttore le cariche sono libere di muoversi quindi se E fosse diverso da 0 all'interno le cariche si muoverebbero violando l'equilibrio.

2) Il campo deve essere perpendicolare alla superficie altrimenti le cariche si ridistribuiscono sulla superficie.

3) La superficie è equipotenziale $E dl = dV = 0$



Campo sulla superficie di un conduttore



$$\Phi_{\text{interno}} = 0 \quad E = 0$$

$$\Phi_{\text{laterale}} = 0 \quad \vec{E} \perp \vec{S}$$

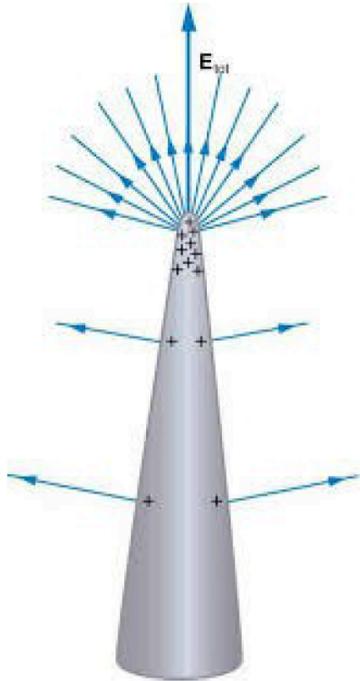
$$\Phi_{\text{superficie}} = E dS$$

$$\Phi = E dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

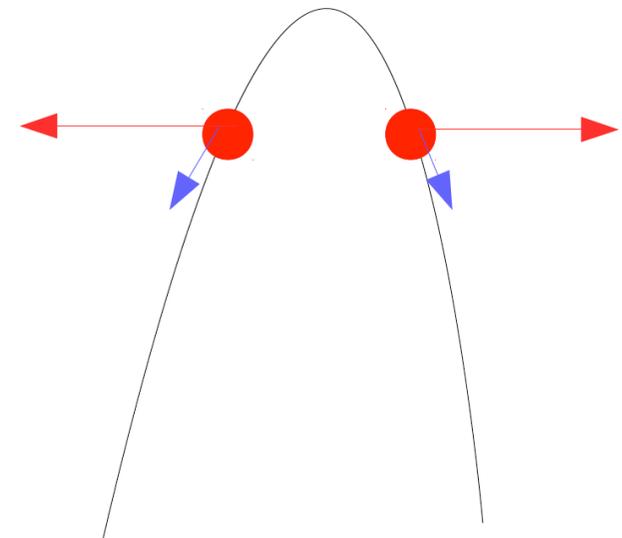
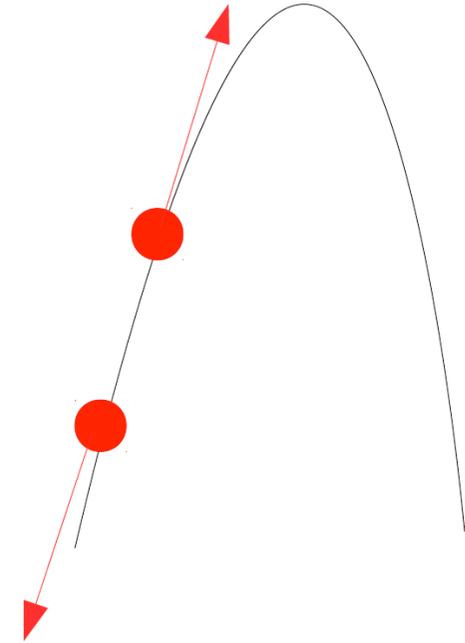
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

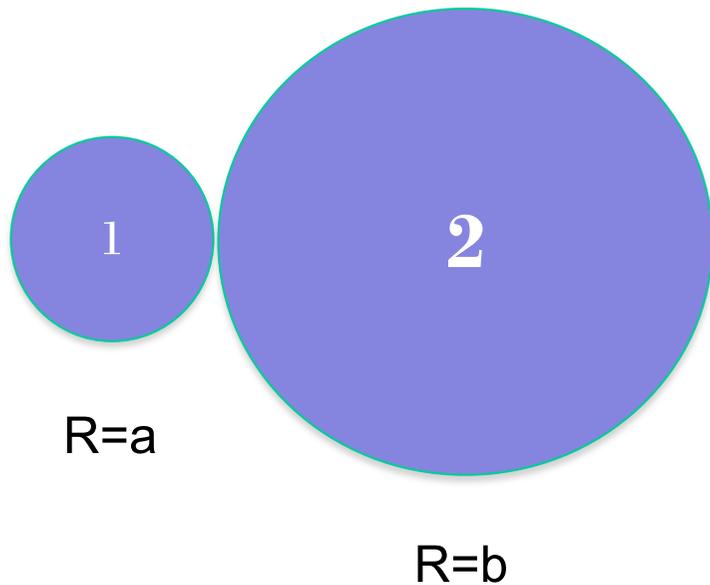
$\sigma = q/ds$ densità superficiale

Perché il campo è più intenso in prossimità di zone con piccola curvatura (punta)?



La mutua forza repulsiva è più piccola perché la componente tangente alla superficie è più piccola.





La superficie è EQUIPOTENZIALE (conduttore in equilibrio)

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{a} \quad V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{b}$$

$$V_1 = V_2$$

perché è un unico conduttore

Ne segue:

$$\frac{Q_1}{a} = \frac{Q_2}{b}$$

Per il campo elettrico:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_1 / \epsilon_0}{\sigma_2 / \epsilon_0}$$

Ma ciascuna densità di carica vale:

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi a^2} \quad \sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi b^2} \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{b}{a}$$

In definitiva:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{Q_1}{a^2} \frac{b^2}{Q_2} = \frac{b}{a}$$

**Il campo è più intenso dove la
curvatura è più piccola**

Esempio: sia $b=2a=2$ cm, $Q_{\text{tot}}=9$ nC

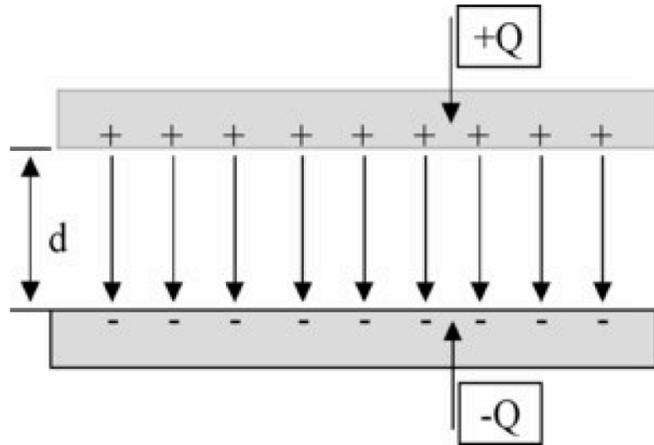
$$\frac{Q_1}{a} = \frac{Q_2}{b} \quad \longrightarrow \quad Q_1 = \frac{Q_2}{2} = 3 \text{ nC}$$
$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi a^2} = \frac{3 \cdot 10^{-9}}{12.56 \cdot (0.01)^2} = 2.39 \mu\text{C} / \text{m}^2$$
$$\sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi b^2} = \frac{6 \cdot 10^{-9}}{12.56 \cdot (0.02)^2} = 1.19 \mu\text{C} / \text{m}^2$$

E per i campi elettrici:

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} = \frac{2.39 \mu\text{C} / \text{m}^2}{8.85 \cdot 10^{-12}} = 0.27 \text{ MV} / \text{m}$$

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} = \frac{1.19 \mu\text{C} / \text{m}^2}{8.85 \cdot 10^{-12}} = 0.135 \text{ MV} / \text{m}$$

Condensatore



$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$
$$V = E d$$

C: Capacità

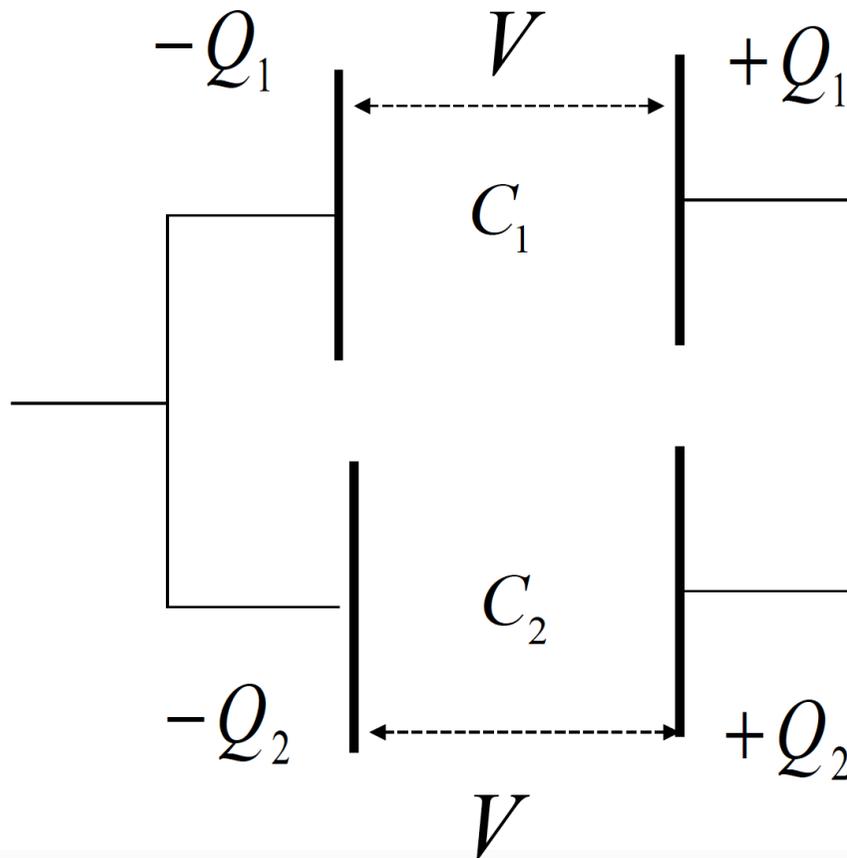
$$Q = \sigma A = E \epsilon_0 A = \frac{V \epsilon_0 A}{d} = C V$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$$1 \text{ F} = \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ V}}$$

Unità di misura: Farad (F)

Condensatori in parallelo

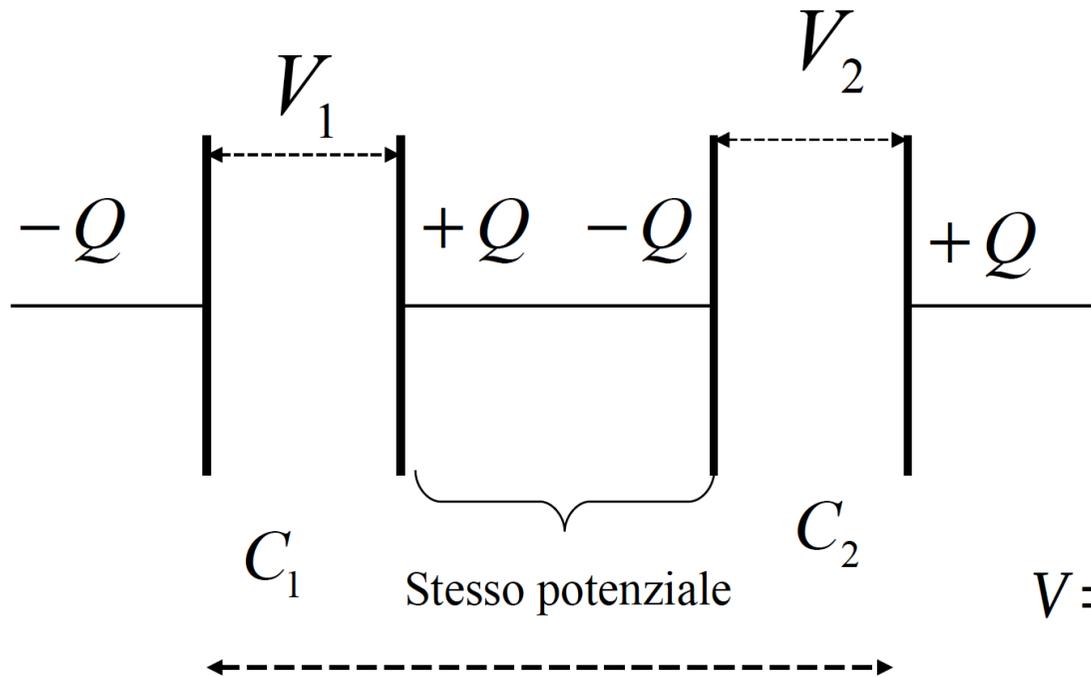


$$Q_1 = C_1 V \quad Q_2 = C_2 V$$
$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2) V = C_{eq} V$$

**Il sistema è equivalente
a un singolo condensatore
con capacità:**

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

Condensatori in serie



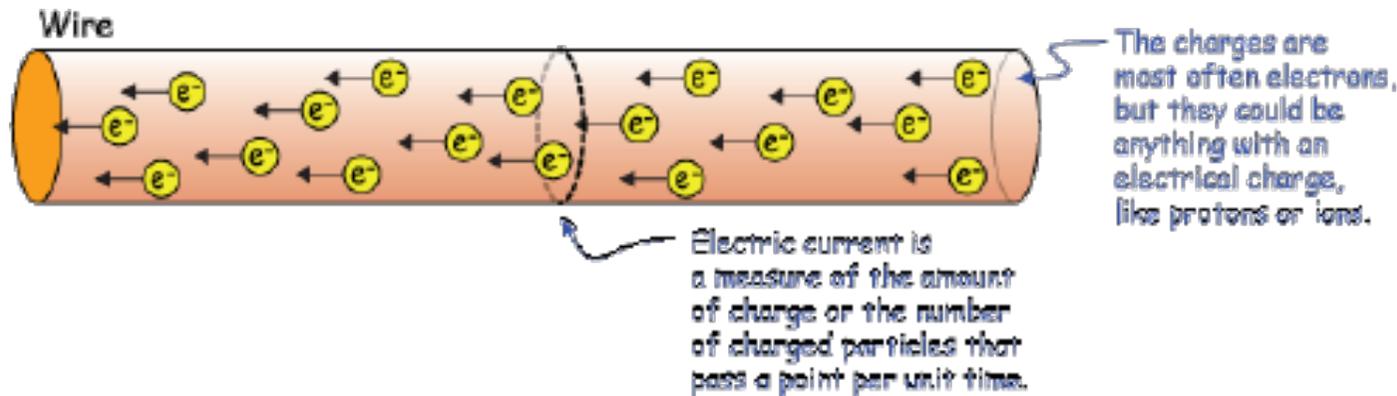
$$V = V_1 + V_2$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) Q$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Es. 2 condensatori da 2 nF ciascuno: $C_{eq} = 1$ nF

Corrente Elettrica

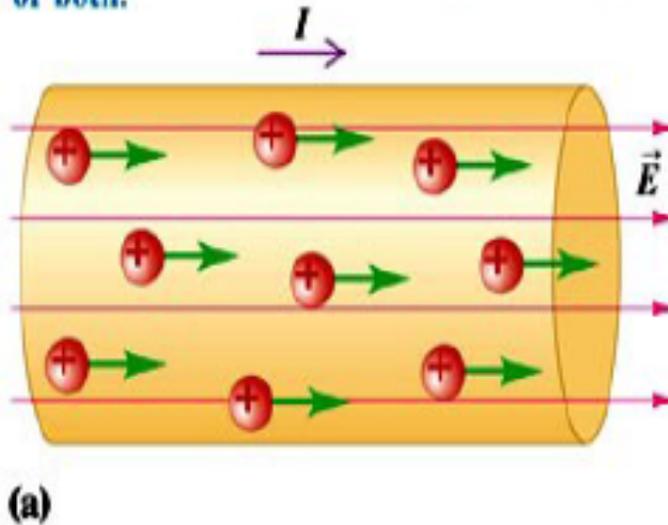


Corrente elettrica: quantità di carica che attraversa una data superficie per unità di tempo

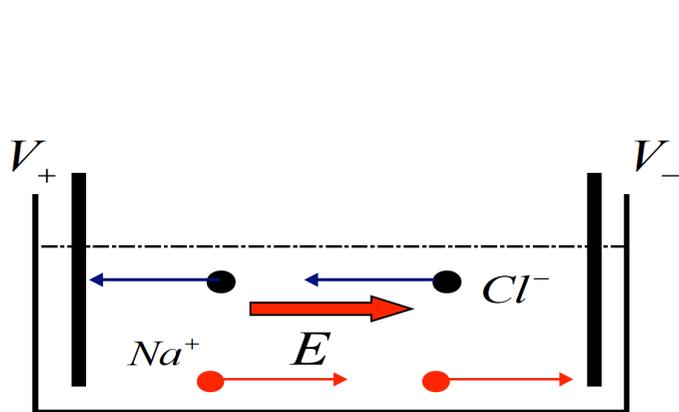
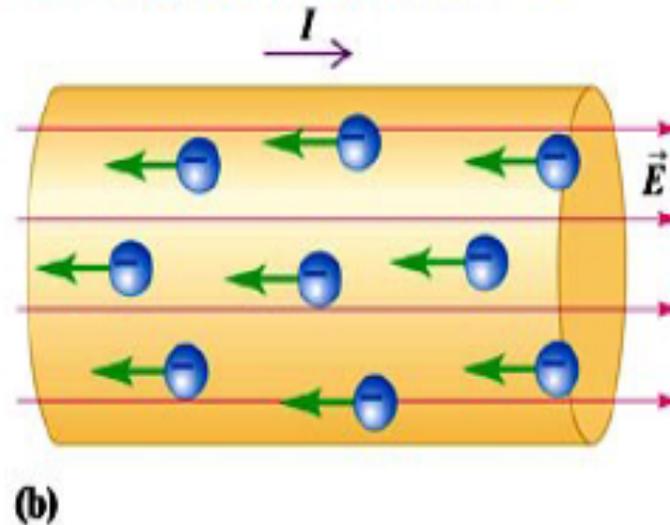
$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

**Unità di misura sono
Coulomb al secondo: Ampere**

A conventional current is treated as a flow of positive charges, regardless of whether the free charges in the conductor are positive, negative, or both.



In a metallic conductor, the moving charges are electrons — but the *current* still points in the direction positive charges would flow.

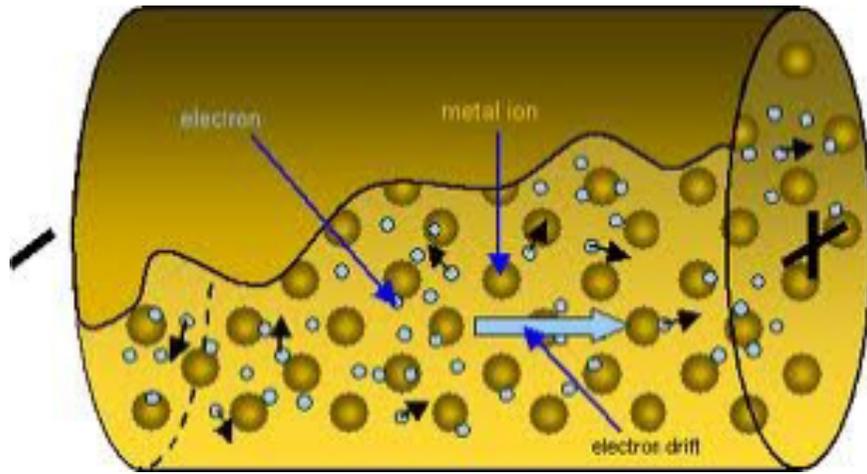


\vec{E}

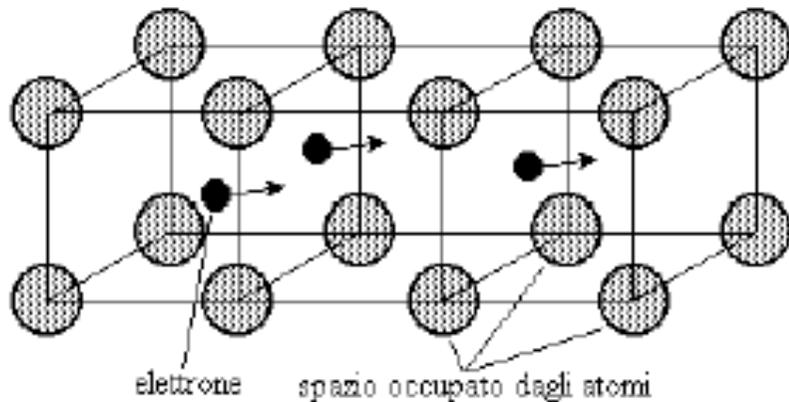
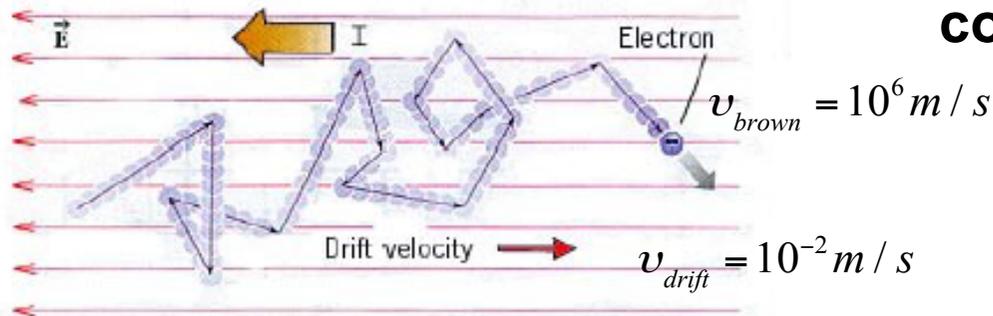
Più complessa è la situazione in un elettrolita

Convenzionalmente, la direzione della corrente è quella in cui si muovono le cariche positive. In realtà, per i conduttori a spostarsi sono gli elettroni.

1 C/s di Na^+ verso destra + 1 C/s di Cl^- verso sinistra equivalgono a 2 C/s di cariche convenzionali da sinistra a destra.



Electron moving in a metal, pushed by electric field



Gli elettroni muovendosi tra gli atomi del reticolo rilasciano energia termica a causa degli incontri con gli atomi. Il moto non è rettilineo ma caotico con una velocità di spostamento (drift) media che dipende dalla densità degli atomi del conduttore.

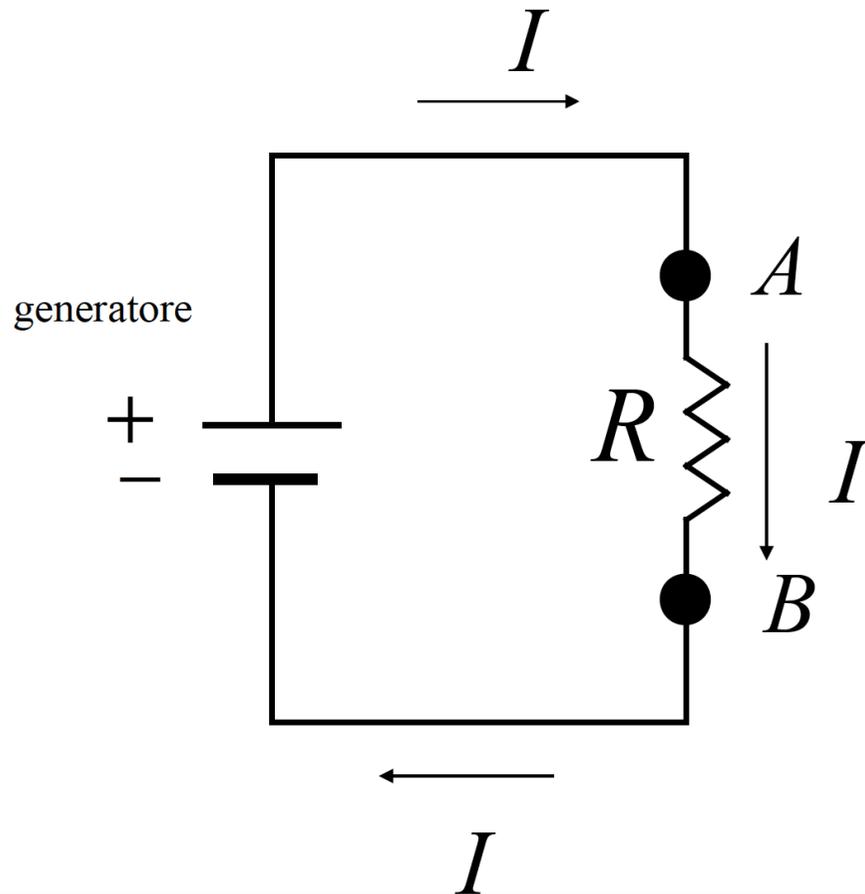
Legge di Ohm

$$V = RI$$

R: Resistenza, si misura in ohm

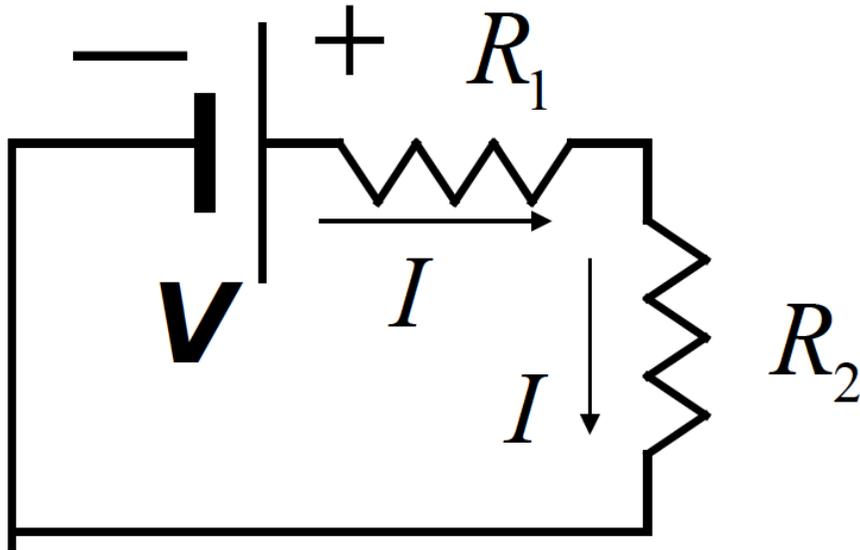
Circuiti elettrici

Schema di circuito elementare



**Obiettivo, dati
ad esempio V
ed R calcolare
la corrente I **

Combinazione di resistenze: serie

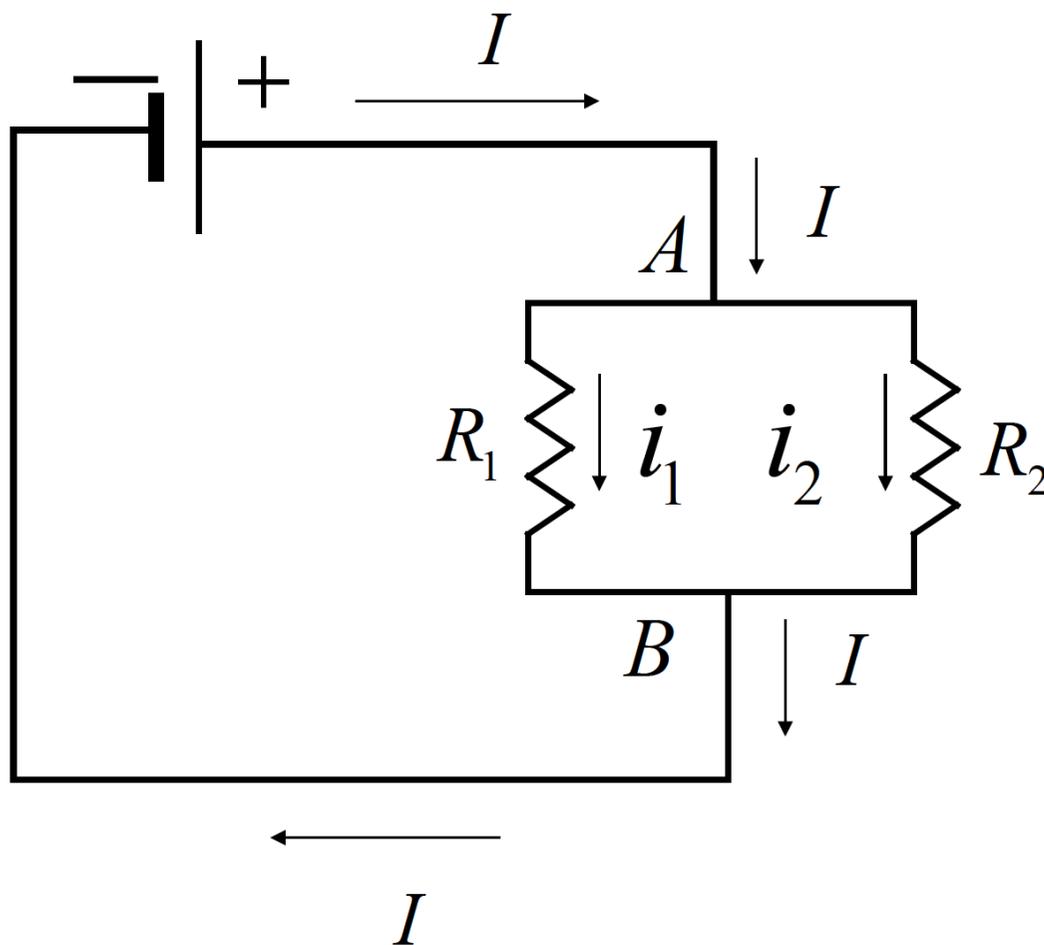


Le resistenze in serie
si sommano

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

$$V = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I = R_{eq} I$$

Combinazione di resistenze: parallelo



$$V_{AB} = R_1 I_1 = R_2 I_2$$

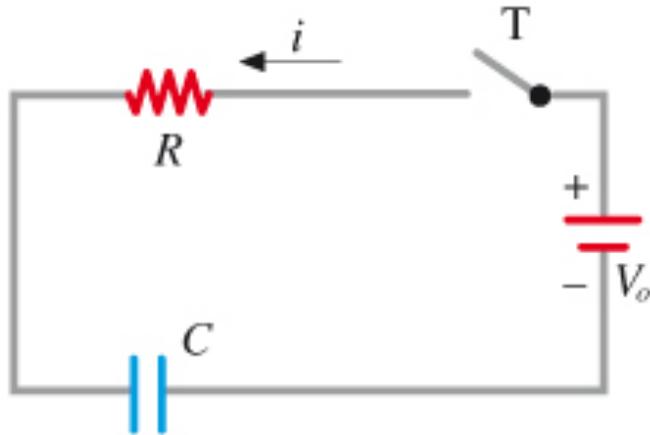
$$I = I_1 + I_2$$

$$I = \frac{V_{AB}}{R_1} + \frac{V_{AB}}{R_2} = V_{AB} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Si sommano gli inversi

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Circuiti RC



$$i = \frac{V_0}{R}$$

I circuiti RC hanno moltissime applicazioni nella vita quotidiana, sono infatti utilizzati per controllare la velocità dei tergicristalli, per regolare gli intervalli di accensione delle luci ai semafori, nei flash delle macchine fotografiche, nei pacemaker cardiaci...

Quando chiudo l'interruttore T del circuito inizia a circolare corrente i

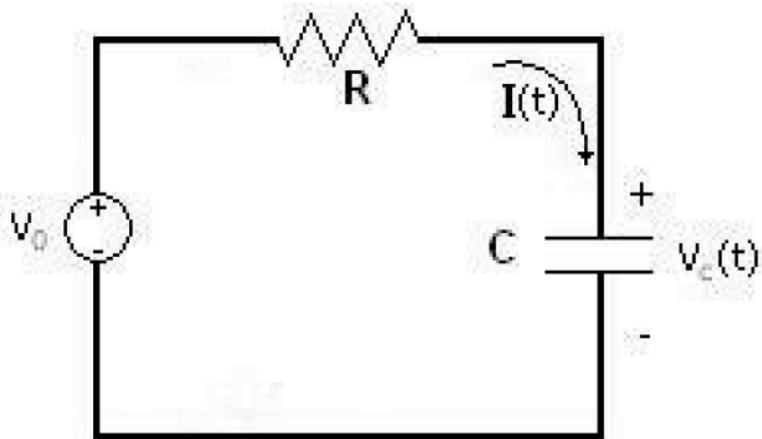
Sulle armature del condensatore inizia ad accumularsi della carica che crea una ΔV tra le armature stesse, indichiamo questa differenza di potenziale con V_C . Analizzando il circuito si vede che

$$V_0 = V_R + V_C = Ri(t) + q(t) / C$$

All'aumentare della carica sulle armature la corrente nel circuito deve diminuire; quando il condensatore è carico, V_C ha il suo valore massimo pari a V_0 e la corrente è nulla.

Circuito RC

CARICA

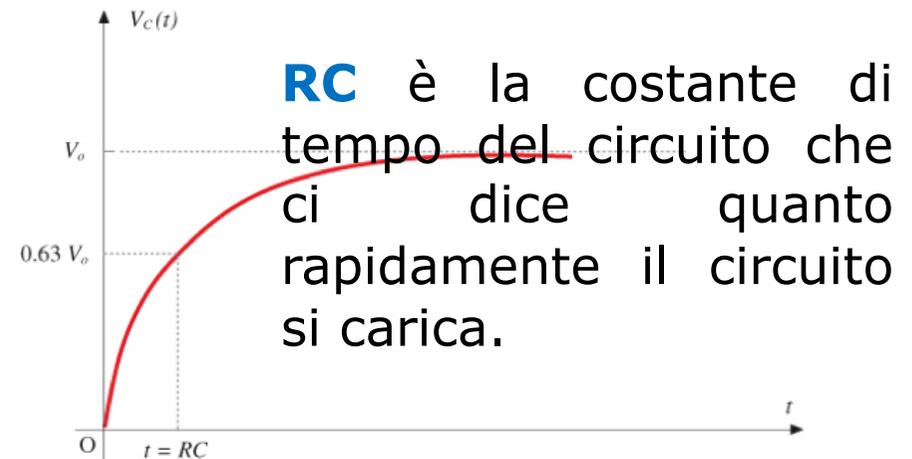


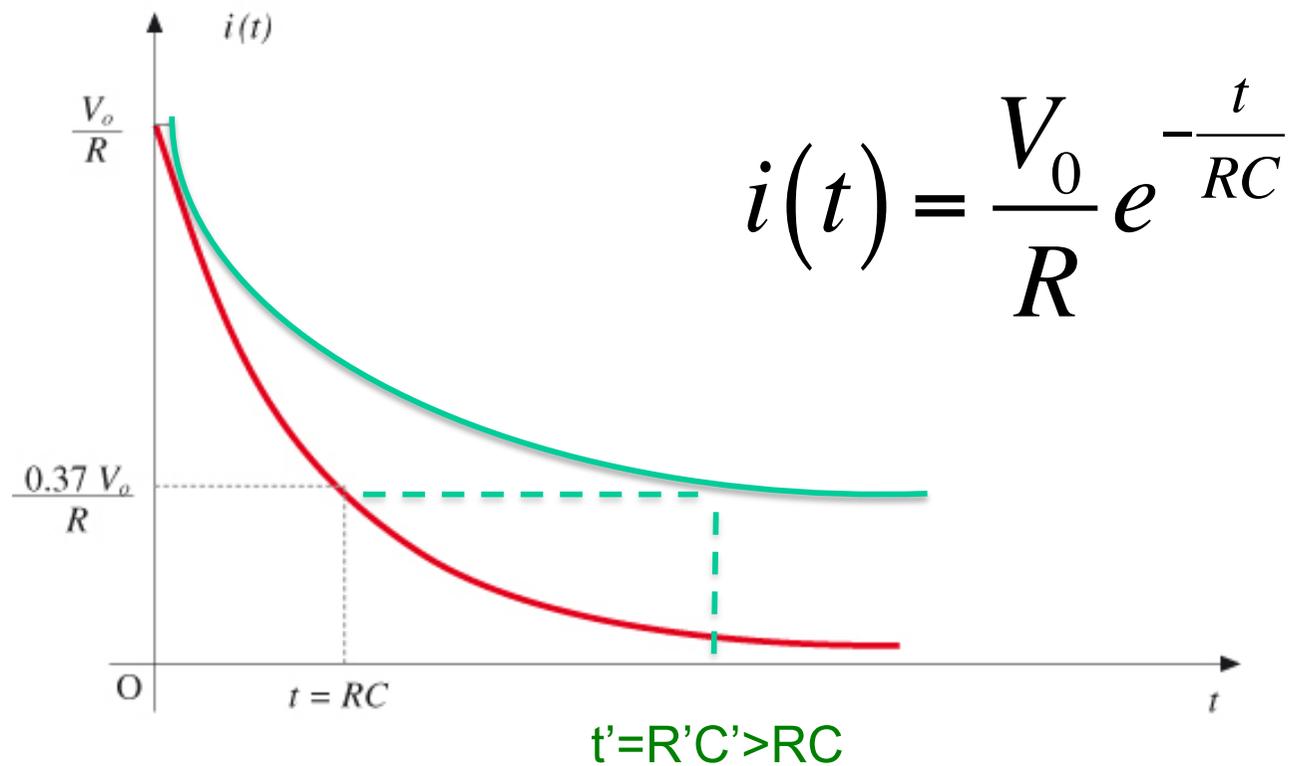
$$i(t=0) = \frac{V_0}{R} \quad \text{condizione iniziale}$$

$$V_0 = Ri + \frac{Q}{C} \quad \rightarrow \quad R \frac{di}{dt} + \frac{dQ}{dt} \frac{1}{C} = 0$$

$$i(t) = \frac{V_0}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

$$V_C(t) = V_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right)$$





$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{i}{RC}$$



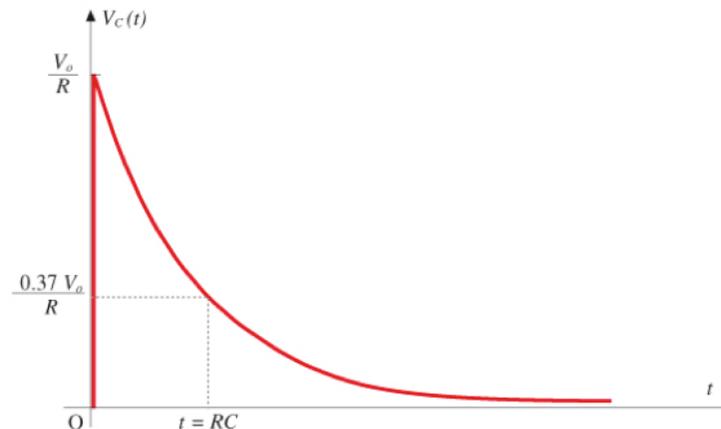
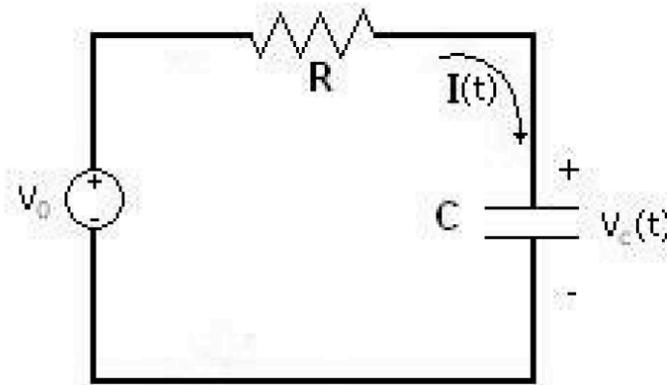
L'esponenziale è l'unica funzione
la cui derivata è l'esponenziale stesso

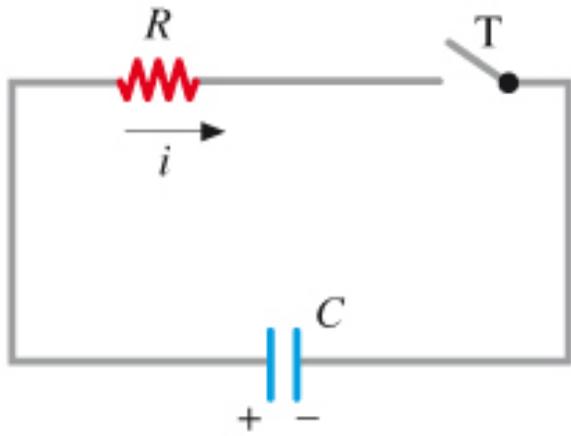
Circuito RC

SCARICA

$$Q_0 = CV_0 \Rightarrow Ri_0 = \frac{Q_0}{C} \Rightarrow i_0 = \frac{V_0}{R}$$

Condizione iniziale





Chiudo l'interruttore e la corrente circola nel circuito, non essendoci più un generatore, la differenza di potenziale ai capi del condensatore si riduce nel tempo dato che c'è un flusso di cariche che tende a scaricare il condensatore. Quando il processo termina i , V e Q sono tutte nulle.

$$R \frac{di}{dt} + \frac{dQ}{dt} \frac{1}{C} = 0$$

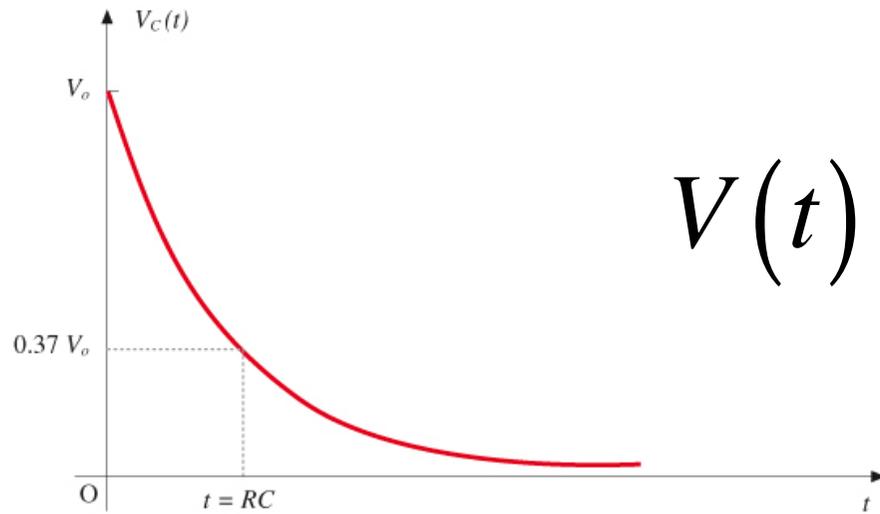
$$Ri = \frac{Q}{R}$$



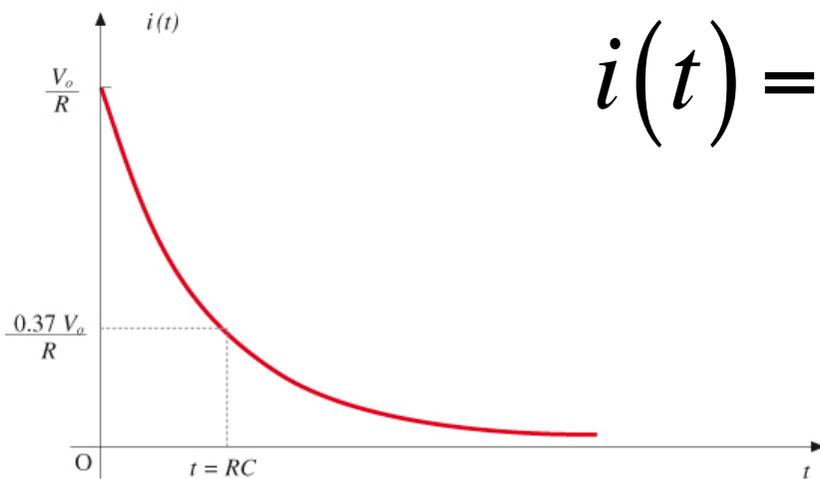
$$i(t) = \frac{V_0}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

$$Q(t) = C V_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

$$V_C(t) = V_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

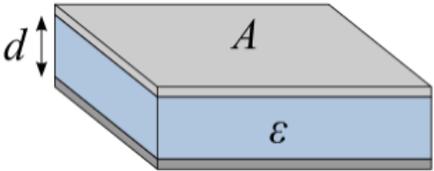
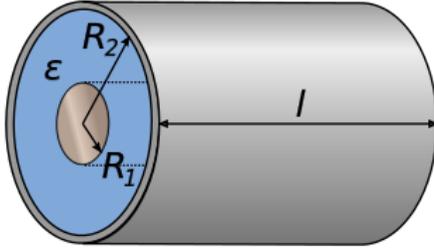
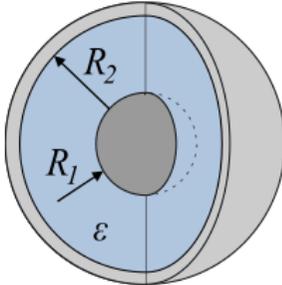
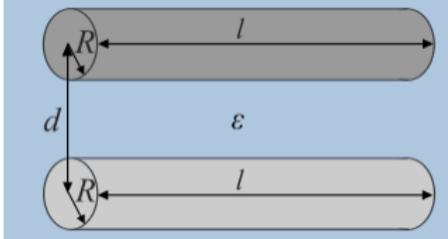


$$V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$



$$i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Tipo di condensatore	Capacità	Schema
lineare	$C = \varepsilon \cdot \frac{A}{d}$	
cilindrico	$C = 2\pi\varepsilon \frac{l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$	
sferico	$C = 4\pi\varepsilon \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^{-1}$	
sfera singola	$C = 4\pi\varepsilon R_1$	
cilindri paralleli	$C = \pi\varepsilon \frac{l}{\operatorname{arcosh}\left(\frac{d}{2R}\right)}$	

$$\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ C}^{-2}$$

Potenza elettrica

$$U = qV \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta q}{\Delta t} V = iV = \frac{V}{R} V = \frac{V^2}{R}$$
$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta q}{\Delta t} V = iV = i(iR) = i^2 R$$

$$P = iV = i^2 R = V^2 / R$$

Esercizio

Due lampadine di potenza 50 e 25 W sono poste in serie. Il circuito è alimentato da una differenza di potenziale $V = 220$ V. Calcolare la corrente i che circola nel circuito, le resistenze R_1 e R_2 delle lampadine e le differenze di potenziale V_1 e V_2 ai capi delle resistenze.

$$P = i^2 R \quad V = Ri$$

$$P_1 = i^2 R_1$$

$$P_2 = i^2 R_2$$

$$V = i(R_1 + R_2)$$

$$V = i \left(\frac{P_1}{i^2} + \frac{P_2}{i^2} \right) = \frac{(P_1 + P_2)}{i}$$

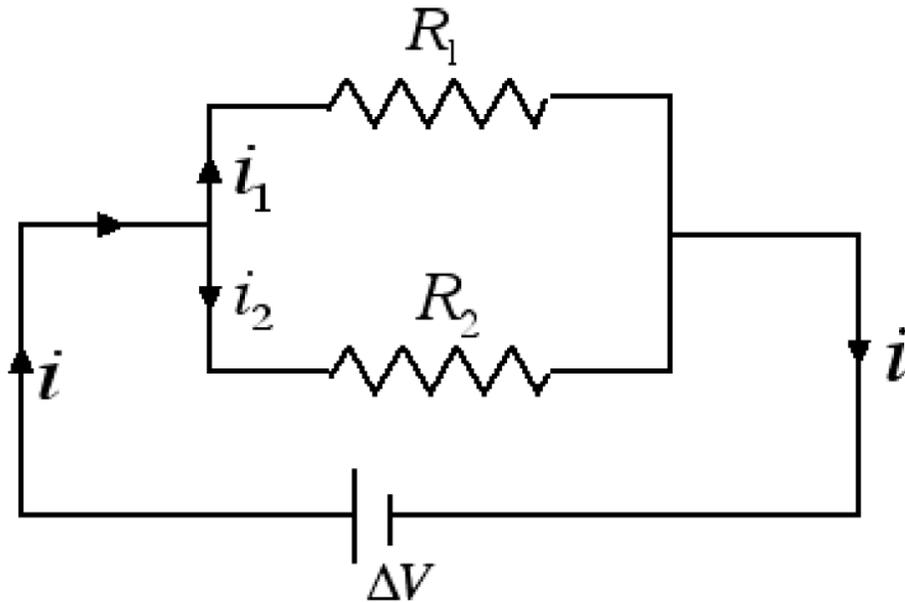
$$i = \frac{(P_1 + P_2)}{V} = 0.34 \text{ A}$$

$$R_1 = \frac{P_1}{i^2} = 432.5 \text{ } \Omega \quad R_2 = \frac{P_2}{i^2} = 216.3 \text{ } \Omega$$

$$V_1 = i R_1 = 147.1 \text{ V} \quad V_2 = i R_2 = 73.5 \text{ V}$$

Esercizio

Due resistenze R_1 e R_2 sono collegate in parallelo. Il valore di R_2 è un quarto di R_1 . La corrente che passa in R_2 viene indicata con i . Qual'è il valore della corrente che passa in R_1 ?



$$R_2 = \frac{1}{4} R_1$$

$$i_2 R_2 = i_1 R_1 \quad i_2 \frac{1}{4} R_1 = i_1 R_1$$

$$i_1 = \frac{1}{4} i_2$$

Il Pacemaker

Ogni ciclo cardiaco inizia con un impulso elettrico di stimolazione da parte di alcune fibre nervose.

Quando l'impulso non è regolare si interviene con un pacemaker impiantato chirurgicamente.

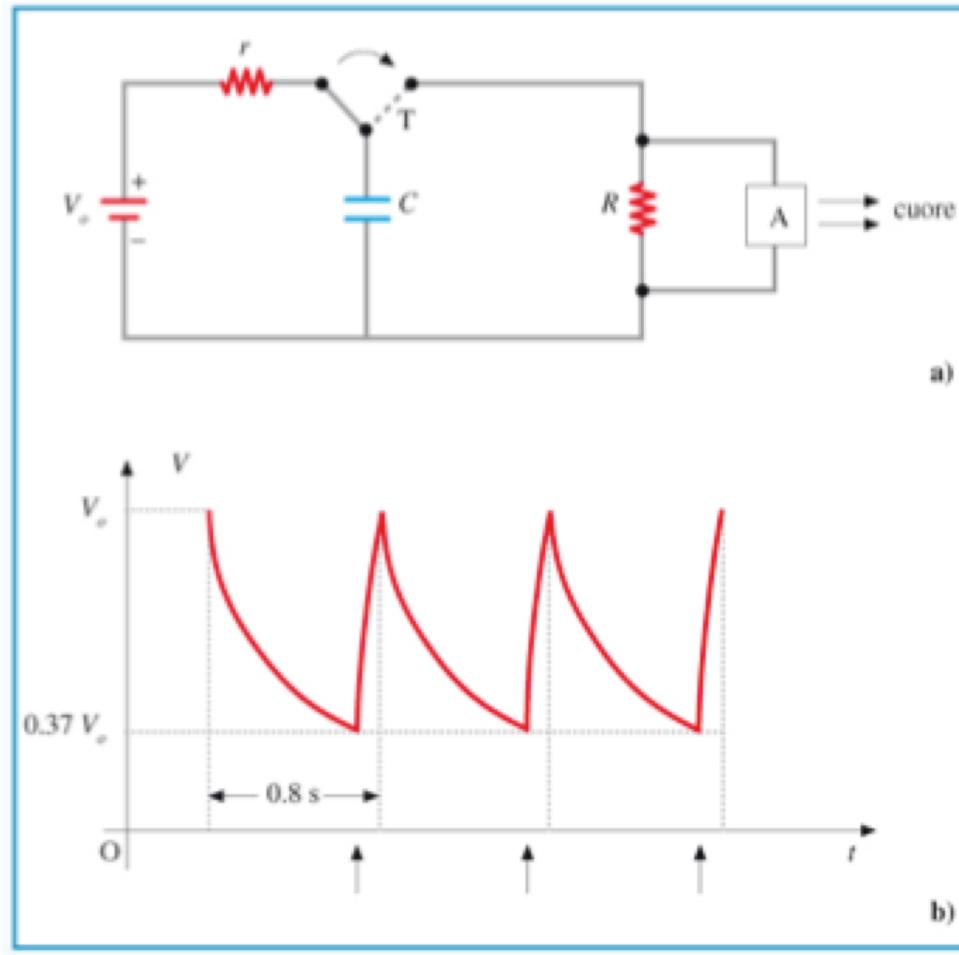
Il circuito del pacemaker è alimentato da una batteria e invia impulsi analoghi a quelli delle fibre nervose.

La frequenza con cui un pacemaker genera impulsi è di 75 impulsi/minuto, ciò avviene grazie ad un circuito in cui è presente una $C = 0.4 \mu\text{F}$, una resistenza di carica r molto piccola ed una di scarica più grande R .

Quando la fase di scarica arriva a e^{-1} , 0.37 volte il valore iniziale di differenza di potenziale (d.d.p.), parte l'impulso successivo ed ha inizio un nuovo processo di carica.

Esercizio

Pacemaker o stimolatore cardiaco



Generatore di impulsi tramite condensatore di $0.4\ \mu\text{F}$:

- Carica veloce con r
- Scarica lenta con R

Quando carica scende di e^{-1} il transistor A invia un breve impulso di stimolo e fa riniziare la carica del condensatore

Ciclo di $1.25\ \text{Hz}$ (cioè $0.8\ \text{sec}$)

$$R = \frac{\tau}{C} = \frac{0.8\ \text{s}}{0.4 \cdot 10^{-6}\ \text{F}} = 2 \cdot 10^6\ \text{ohm}$$

Rischi legati all'elettricità

La corrente elettrica può arrecare danni al corpo umano ed essere letale.

Ci sono due tipi di danni:

- la corrente riscalda i tessuti e provoca ustioni
- la corrente stimola muscoli e nervi, il cui funzionamento è di natura elettrica, e provoca una scossa.

La pericolosità della scossa dipende dall'intensità della corrente, dalla sua durata e dalla parte del corpo interessata, se la corrente attraversa il cuore o il cervello il rischio è particolarmente elevato.

intensità corrente effetto

1 mA

dolore

>10 mA

contrazioni muscolari gravi, anche letali

>80 mA

se attraversa il busto e passa in parte nel cuore provoca contrazioni irregolari dei muscoli cardiaci impedendo un pompaggio regolare del sangue → fibrillazione ventricolare → morte

1 A

minore probabilità di morte, causa ustioni importanti

In realtà la causa prima del danno al tessuto è la d.d.p. che genera la corrente. Altro fattore importante è la resistenza dei tessuti. I tessuti biologici hanno resistenza molto bassa dato che il fluido contenuto nelle cellule è un buon conduttore.

La cute, se ben asciutta, presenta una resistenza notevole e svolge un ruolo protettivo.

Se prendiamo due punti su lati opposti del corpo umano e supponiamo che la pelle sia completamente asciutta, la resistenza è compresa tra 10^4 e $10^6 \Omega$. Se la pelle è bagnata la resistenza scende al di sotto di $10^3 \Omega$.

Pertanto una persona che si trovi a piedi nudi, o con scarpe dalla suola molto sottile, a contatto con il suolo e tocchi l'alimentazione a 220 V dell'impianto di casa con una mano bagnata rischia di essere attraversata da una corrente

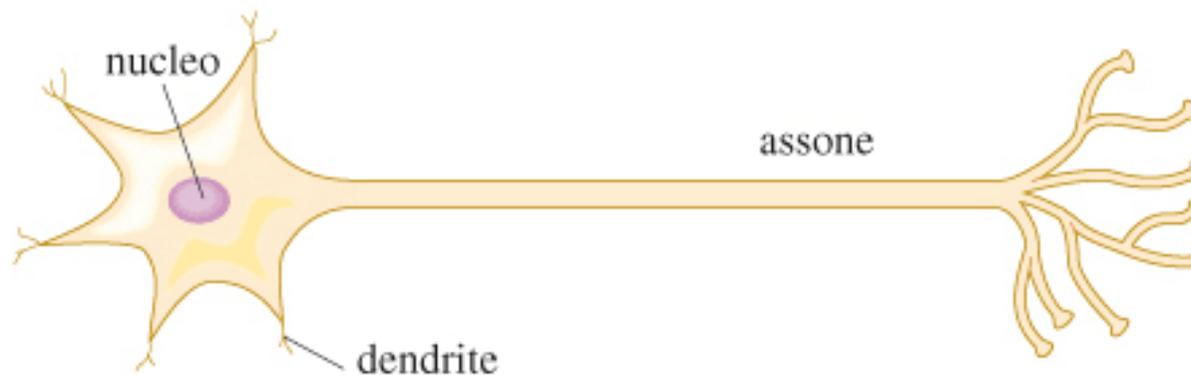
$$i = \frac{220 V}{1000 \Omega} = 220 \text{ mA}$$

Questa corrente può essere letale.

Conduzione elettrica nel sistema nervoso

Elemento fondamentale del sistema nervoso è il **neurone** lungo cui si propagano i segnali di natura elettrica inviati dalle diverse componenti del sistema nervoso.

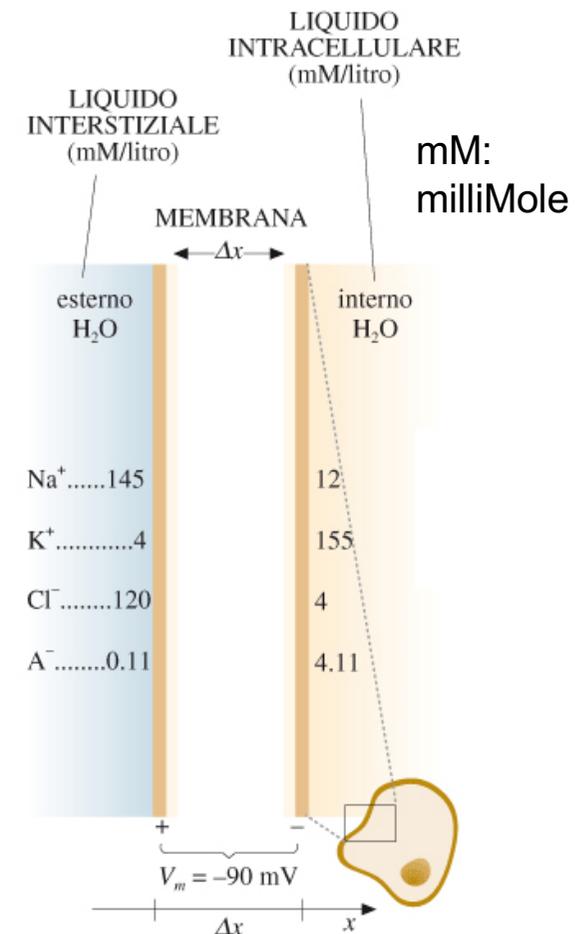
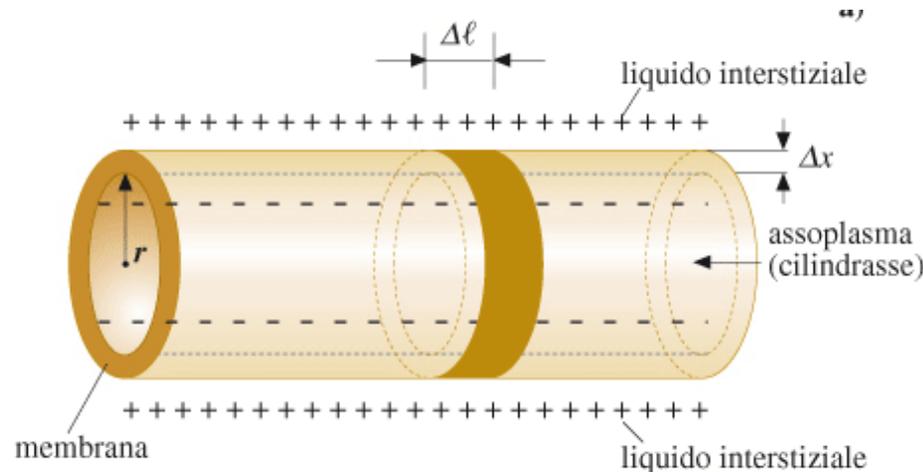
Il neurone è una cellula vivente di forma particolare: al corpo principale sono attaccate diverse appendici (**dendriti**) e una lunga coda chiamata **assone**. I dendriti ricevono il segnale che si propaga poi lungo l'assone, quando i segnali arrivano all'estremità della cellula nervosa vengono trasmessi ad un neurone adiacente o a un muscolo connesso al neurone tramite la **sinapsi**.



Inizialmente i neuroni sono a riposo e come quasi tutte le cellule nervose hanno una carica netta positiva sulla parte esterna della membrana cellulare ed una carica negativa su quella interna. Si crea così una d.d.p. attraverso la membrana cellulare. Il **potenziale di riposo** attraverso la membrana vale

$$V_{interno} - V_{esterno} : \text{tra } -90 \text{ e } -60 \text{ mV}$$

Gli ioni più comuni che generano la d.d.p. sono K^+ , Na^+ e Cl^- . Essi sono presenti con concentrazioni molto diverse tra di loro che inducono gli ioni a diffondere attraverso la membrana cellulare fino a quando la d.d.p. che si instaura bilancia il processo di diffusione. L'assone è assimilabile ad un cavo coassiale.



Lo spessore della membrana cellulare è dell'ordine di 80 Å.
 Ad ogni tratto di lunghezza Δl dell'assone si può associare un circuito elettrico con una resistenza interna r_i dovuta all'assoplasma e una resistenza esterna r_e dovuta al liquido interstiziale. Di solito r_e viene trascurata. La membrana equivale ad un condensatore di capacità C_m ed una resistenza R_m in parallelo tra di loro.

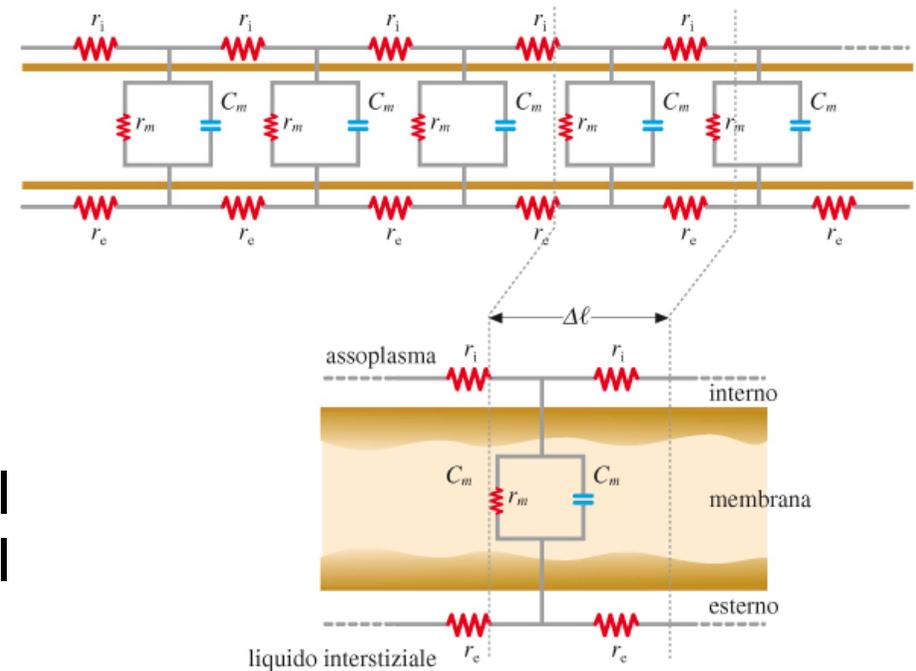
Il diametro dell'assone è di circa 10^{-3} cm.

Come il cavo, l'assone è caratterizzato da due parametri: la costante di tempo τ e la costante di spazio λ .

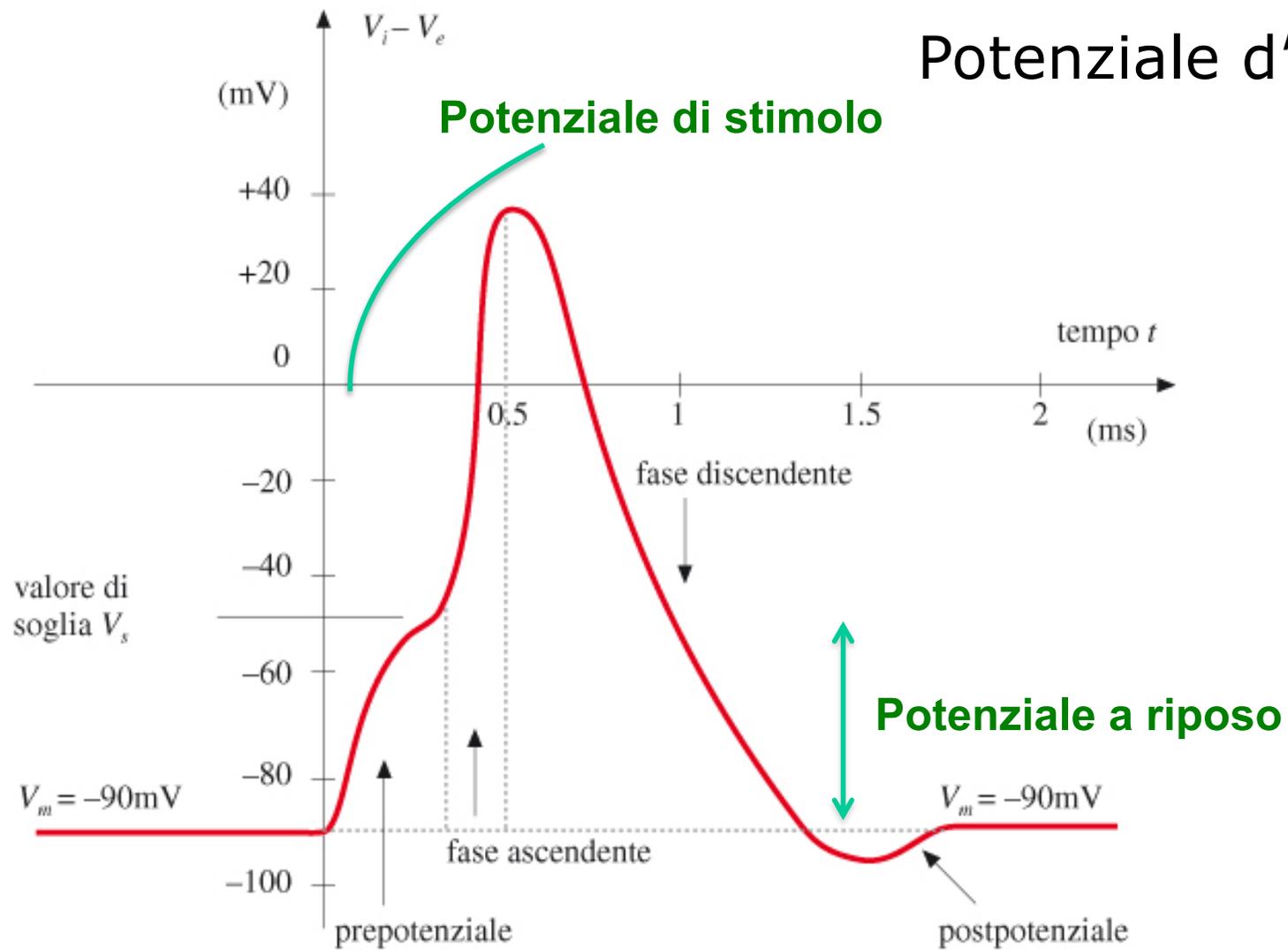
Se si considera il circuito RC del tratto di lunghezza Δl , si ha che il potenziale di stimolo V_S vale

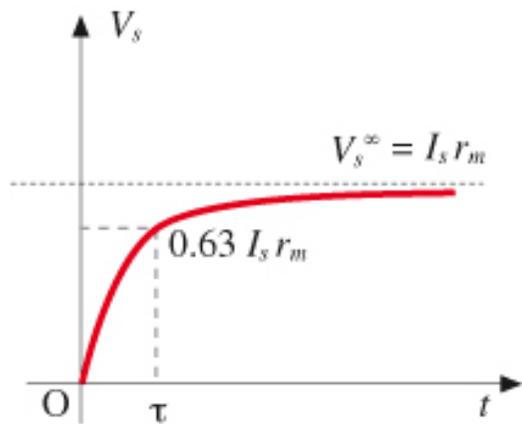
$$V_S(t) = I_S R_m (1 - e^{-t/\tau})$$

dove I_S è la corrente iniziale e $\tau_m = C_m R_m$.

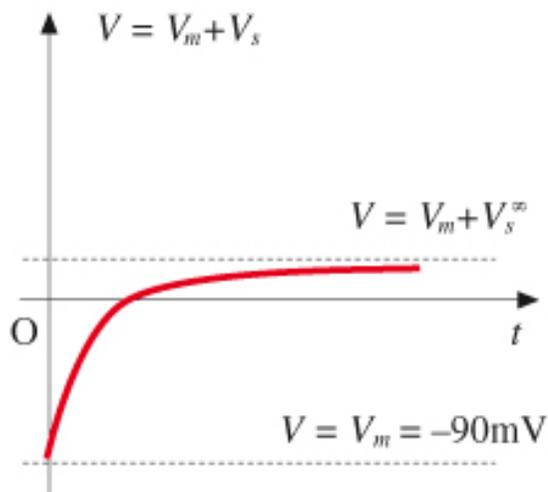


Potenziale d'azione





a)



b)

V_s si somma a V_m dando origine al potenziale d'azione. Quando ci si allontana dal punto in cui si genera lo stimolo, la variazione di V_s diminuisce e quindi diminuisce anche il potenziale di membrana a causa della resistenza r_i dell'assoplasma, che a sua volta aumenta allontanandosi dal punto di stimolazione. Si ottiene

$$V_s^\infty(t) = I_s R_m e^{-t/\tau} \quad \lambda = \Delta l \sqrt{\frac{R_m}{r_i}}$$

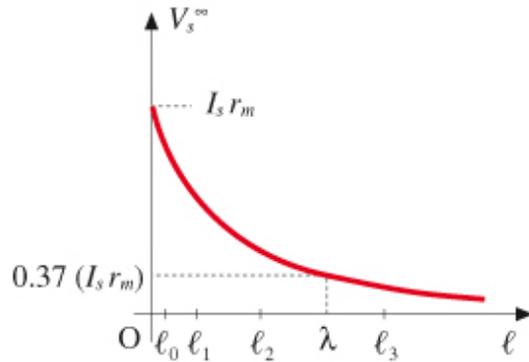
Per un tratto di assone di lunghezza Δl e raggio r , in base alla legge di Ohm si ha

$$R = \rho \frac{\Delta x}{S}$$

ρ : resistività

quindi $R_m = \frac{\rho_m \Delta x}{2\pi r \Delta l}$

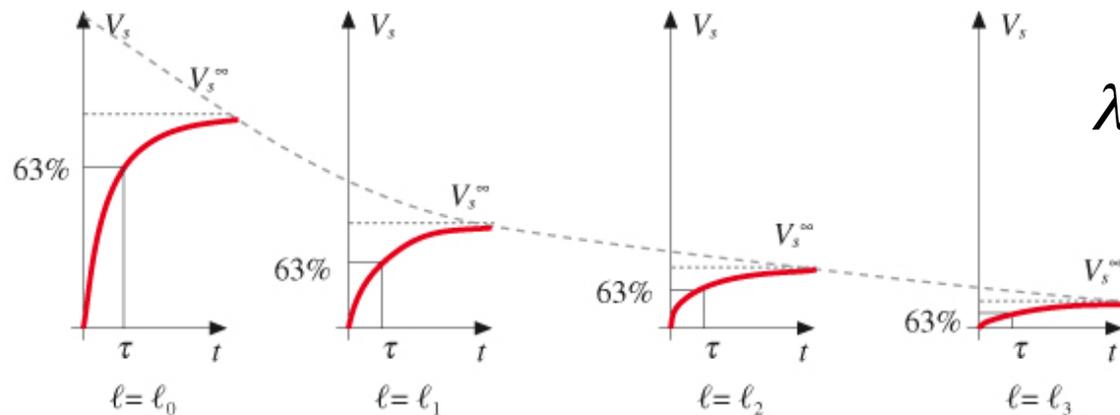
e $C_m = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{2\pi r \Delta l}{\Delta x}$



$$\tau = R_m C_m = \rho_m \frac{\Delta x}{2\pi r \Delta l} \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{2\pi r \Delta l}{\Delta x} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \rho_m$$

$$\varepsilon = 8 \cdot 10^{-11} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \quad \rho_m = 10^7 \text{ } \Omega \text{ m}$$

$$\text{Allora } \tau = 8 \cdot 10^{-4} \text{ s} = 0.8 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$



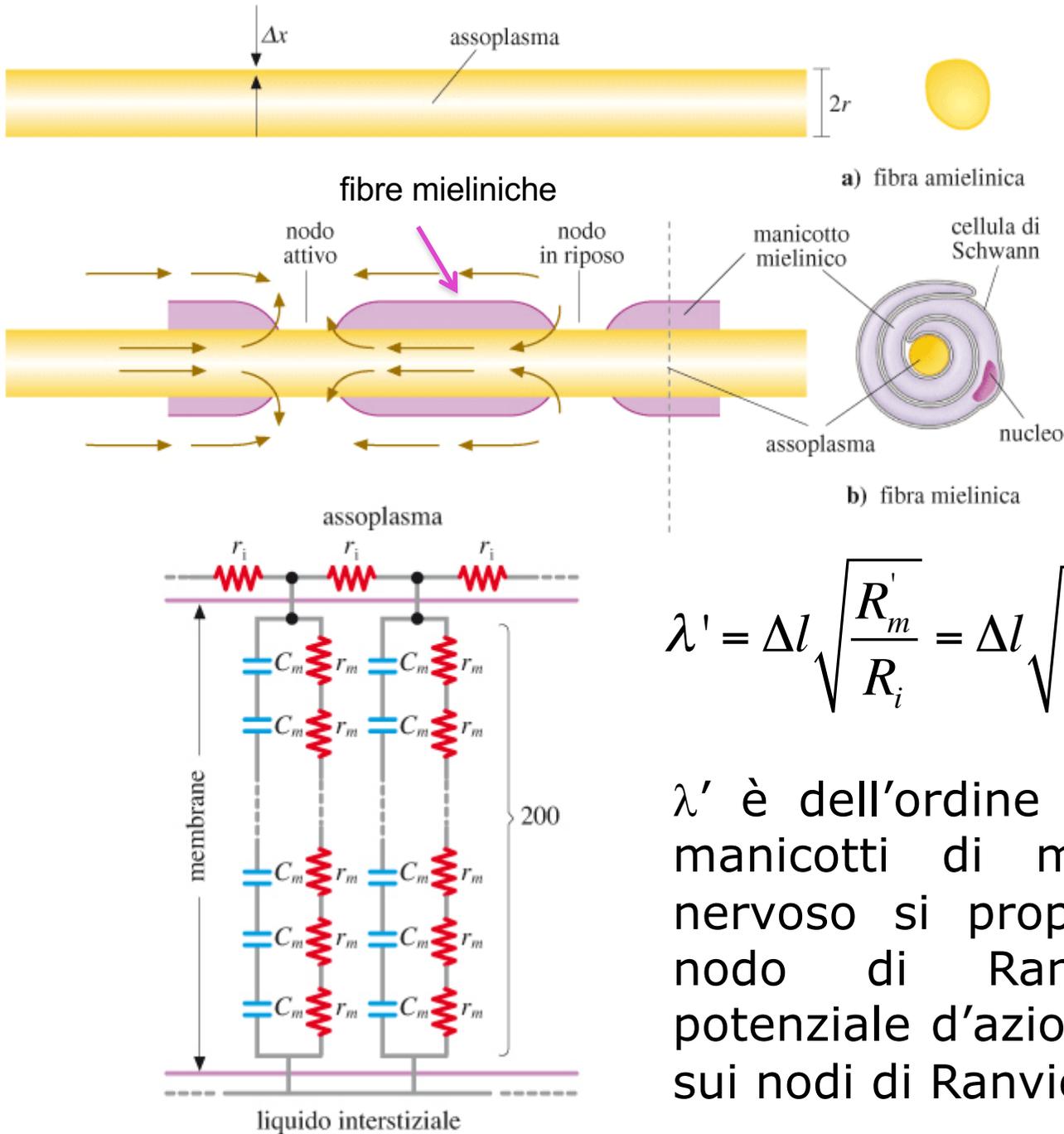
$$\lambda = \Delta l \sqrt{\frac{\rho_m \Delta x \pi r^2}{2\pi r \rho_i \Delta l^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho_m}{\rho_i}} 2r \Delta x$$

Se il diametro dell'assone vale $10 \mu\text{m}$ e $\Delta x = 200 \text{ \AA}$, allora $\lambda = 0.5 \text{ mm}$. Quindi dopo aver percorso una distanza pari a λ , il segnale si è ridotto ad $1/3$ circa e dopo 2λ (1 mm) è circa $1/7$ del segnale originario e non può più innescare il potenziale d'azione. In realtà gli stimoli percorrono distanze notevolmente più lunghe, dell'ordine di un paio di metri. Interviene a questo punto un meccanismo chiamato pompa Na^+K^+ .

Questa pompa è in grado di mantenere il potenziale di membrana V_m e fa sì che, il potenziale d'azione si sviluppi anche nelle zone adiacenti a quelle stimulate. Sulla distanza λ il potenziale d'azione diminuisce di un fattore pari ad $e = 2.718$, ovvero da $+30 - (-90) = 120$ mV circa a 40 mV (valore prossimo al potenziale di soglia). Tutto questo avviene in un tempo pari alla costante di tempo del processo di carica-scarica del condensatore equivalente. Infine si ottiene

$$v = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{0.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{0.8 \cdot 10^{-3} \text{ s}} \approx 0.6 \text{ ms}^{-1} \quad v \propto \sqrt{r}$$

Per aumentare la velocità di propagazione del potenziale d'azione lungo l'assone e di conseguenza i tempi di reazione dell'organismo c'è bisogno di fibre di dimensioni maggiori e di maggiore energia. Le fibre mieliniche presentano queste caratteristiche senza ricorrere alla pompa Na^+K^+ e quindi necessita anche di meno energia.



Nodi di Ranvier
 Centinaia di avvolgimenti attorno all'assoplasma. Il sistema equivale al circuito di figura. La resistenza del circuito aumenta e allora λ diventa

$$\lambda' = \Delta l \sqrt{\frac{R'_m}{R_i}} = \Delta l \sqrt{\frac{200 R_m}{R_i}} \approx 15 \Delta l \sqrt{\frac{R_m}{R_i}} \approx 15 \lambda$$

λ' è dell'ordine delle distanze tra i manicotti di mielina e l'impulso nervoso si propaga a salti da un nodo di Ranvier all'altro. Il potenziale d'azione si manifesta solo sui nodi di Ranvier.

Infine si ottiene

$$\tau' = C'_m R'_m \quad \text{con} \quad R'_m = 200 R_m \quad C'_m = \frac{C_m}{200}$$

$$\tau' = 200 R'_m \frac{C_m}{200} = R_m C_m = \tau$$

Per la velocità di propagazione si ottiene

$$v' = \frac{\lambda'}{\tau} = \frac{15\lambda}{\tau} = 15v$$

v' è dell'ordine di alcune decine di m/s e risulta proporzionale al raggio r della fibra mielinica