Domande d'esame tratte dalle prove di accertamento in itinere degli anni precedenti

1) Un punto materiale P si sposta nel piano (x,y) dall' origine O degli assi coordinati di una lunghezza s_1= 30 m in direzione y e successivamente di s_2= 40 m nella direzione che forma un angolo $\theta=30^o$ con la direzione x. Si scriva l' espressione analitica delle componenti del vettore spostamento finale **r** = (r_x,r_y) e si determini la distanza dall'origine del punto finale P:

   r_x = ... r_y = ……..
   r = …………

2) Due vettori **a** e **b**=(3,4) formano un angolo $\theta=45^o$ ed il loro prodotto scalare vale s = **a·b** = 25. Calcolare il modulo del vettore a :

   a=………

3) Un oggetto viene lanciato con velocita' v_0 = 10 m/s inclinata di un angolo $\theta = 20^o$ rispetto all' asse x orizzontale (con componente v_{0y} positiva), da un' altezza y_0 = 5 m. Si determini il modulo della velocita' e la posizione (x,y) al tempo t = 0,15 s (si assuma x_0 = 0.)
   v = ……
   x =.......... y = ...

4) Un punto materiale percorre una traiettoria circolare di raggio R= 8 m con legge oraria lungo la traiettoria $s(t) = at + bt^2 + ct^3$, con a=2 m/s, b=0.4m/s^2, c= 0.3m/s^3. Determinare la velocita' ed il modulo del vettore accelerazione al tempo t = 2 s .
   v =.........
   a = ………

5) In un moto armonico, la massima accelerazione si ha:
   O nell' istante in cui la velocita' e' massima
   O nell' istante di inversione del moto
   O nel passaggio per il centro di oscillazione

6) Un oggetto viene lanciato con velocita' iniziale v_0=15 m/s diretta orizzontalmente dalla sommita' di un edificio alto h=10 m. Assumendo l'accelerazione di gravita' g=10 m/s^2, determinare:
   - il tempo di caduta: t_c = ……….
   - la distanza del punto d'impatto al suolo dalla base dell' edificio: x_c = ……….
   - le velocita' all' impatto: v_c=…………
   - l' angolo d' impatto , ossia l' angolo tra il vettore $\mathbf{v_c}$ e la direzione orizzontale, al momento dell' impatto: θ = …….

7) Un punto materiale compie un moto armonico con pulsazione ω. All' istante iniziale si trova in posizione X_0 = 0,7 m (essendo x=0 il centro di oscillazione del moto), con velocita' positiva v_0=1 m/s. Si osserva che l' ampiezza del moto e' A=1,4 m. Si scriva l' equazione differenziale del moto e la legge oraria, determinando il valore della pulsazione:

   ω =………………..

   Si determini il valore dell' accelerazione in x = A : a =………… …..

8) Recentemente un Airbus all' aeroporto di Linate ha dovuto abortire il decollo per evitare la collisione con un Cessna, quando la sua velocita' in pista era v_o = 145 km/h. Lo spazio di frenata e' stato di 250 m. Calcolare l' accelerazione, assunta costante, impressa invertendo la spinta dei motori ed il tempo di frenata.

   a = ………, t_f = ………....

9) Un disco di raggio R=0,5 m ruota con velocita' angolare $\omega(t) = At^2 + B$, con A = 0,3 rad/s^3 e B = 2 rad/s. Un punto P sul bordo del disco ha la posizione iniziale θ_o=0 . Determinare :
   - la posizione angolare finale al tempo t_f= 2s : θ_f = …………
   - l' accelerazione normale e tangente alla traiettoria nello stesso istante:

   a_N = …………, a_T=…………

10) Un punto materiale parte dall' origine dell' asse x con velocita' iniziale v_0=1 m/s ed e' sottoposto ad un' accelerazione a(x) = -k x, con k = 0,2 s^{-2}. Calcolare la distanza dall' origine alla quale il punto si ferma invertendo il suo moto:

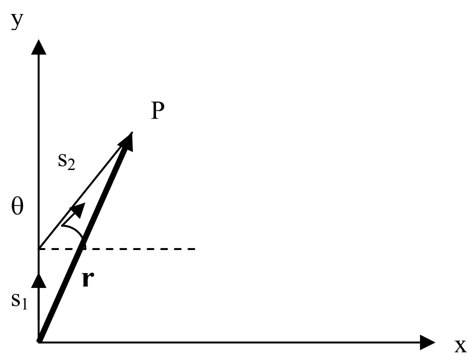
    x_f = ………

Soluzioni:

1) Un punto materiale P si sposta nel piano (x,y) dall' origine O degli assi coordinati di una lunghezza s_1= 30 m in direzione y e successivamente di s_2= 40 m nella direzione che forma un angolo $\theta=30^o$ con la direzione x. Si scriva l' espressione analitica delle componenti del vettore spostamento finale **r** = (r_x,r_y) e si determini la distanza dall'origine del punto finale P:

$r_x = s_2\cos\theta \qquad r_y = s_1 + s_2\sin\theta$

$r = [r_x^2+r_y^2]^{1/2} = 67{,}7$ m



2) Due vettori **a** e **b**=(3,4) formano un angolo $\theta=45^o$ ed il loro prodotto scalare vale s = **a·b** = 25. Calcolare il modulo del vettore a :

$b = [9+16]^{1/2} = 5$

$a = s / (b \cos\theta) = 7{,}1$

3)Un oggetto viene lanciato con velocita' v_0 = 10 m/s inclinata di un angolo $\theta = 20^o$ rispetto all' asse x orizzontale (con componente v_{0y} positiva), da un' altezza y_0 = 5 m. Si determini il modulo della velocita' e la posizione (x,y) al tempo t = 0,15 s (si assuma x_0 = 0.)

$v_x = v_0 \cos\theta = 9{,}4$ m/s

$v_y = v_0 \sin\theta - g\,t = 3{,}4 - 9{,}8 \times 0{,}15 = 1{,}93$ m/s

$v = [v_x^2+v_y^2]^{1/2} = 9{,}6$ m/s

$x = v_0 \cos\theta\ t = 1{,}4$ m $\qquad y = y_0 + v_0 \sin\theta\, t - gt^2/2 = 5{,}4$ m

4) Un punto materiale percorre una traiettoria circolare di raggio R= 8 m con legge oraria lungo la traiettoria $s(t) = at + bt^2 + ct^3$, con a=2 m/s, b=0.4m/s^2, c= 0.3m/s^3. Determinare la velocita' ed il modulo del vettore accelerazione al tempo t = 2 s .

$v(t) = ds(t)/dt = a + 2\,bt + 3\,ct^2$; $v(t{=}2s) = 7{,}2$ m/s

La componente dell' accelerazione tangente alla traiettoria e':

$a_T(t) = dv(t)/dt = 2b + 6ct$; $a_T(t{=}2\ s) = 4{,}4\ m/s^2$

La componente normale e':

$a_N(t) = v^2(t)/R$ Al tempo t=2s : $a_N(t{=}2s)= 6{,}5\ m/s^2$

Quindi: $a = [a_T^2 + a_N^2]^{1/2} = 7{,}8\ m/s^2$

5) In un moto armonico, la massima accelerazione si ha:

O nell' istante di inversione del moto

6) Un oggetto viene lanciato con velocita' iniziale v_0=15 m/s diretta orizzontalmente dalla sommita' di un edificio alto h=10 m. Assumendo l'accelerazione di gravita' g=10 m/s^2, determinare:

a. il tempo di caduta:

$y\,(t_c) = h - gt_c^2/2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_c = [2h/g]^{1/2} = 1{,}41$ s

b. la distanza del punto d'impatto al suolo dalla base dell' edificio:
$x_c = v_0 t_c = 21$ m

c. le velocita' all' impatto:
$v_y(t_c) = -g\,t_c = -14$ m/s
$\Rightarrow\ v_c = [v_o^2 + v_y^2\,] = 20$ m/s

d. l' angolo d' impatto , ossia l' angolo tra il vettore $\mathbf{v_c}$ e la direzione orizzontale, al momento dell' impatto:
$\mathrm{tg}\ \theta = v_y/v_x = v_y/v_0 \qquad \theta = 43°$.

7) Un punto materiale compie un moto armonico con pulsazione ω. All' istante iniziale si trova in posizione X_0 = 0,7 m (essendo x=0 il centro di oscillazione del moto), con velocita' positiva v_0=1 m/s. Si osserva che l' ampiezza del moto e' A=1,4 m. Si scriva l' equazione differenziale del moto e la legge oraria, determinando il valore della pulsazione:

$x(t) = A \sin (\omega t + \phi)$;

$X_0 = A \sin \phi$, $\quad \sin\phi = X_0/A = 0.5 \quad \Rightarrow \quad \phi = 30°$.

$v(t) = dx(t)/dt = A\,\omega \cos (\omega t+\phi) \ \Rightarrow v_0 = A\,\omega \cos \phi$

$\Rightarrow \quad \omega = v_0 / A \cos \phi = 0{,}82$ rad/s

Il valore dell' accelerazione in x = A : $\quad a(t) = d^2x/dt^2 = -\omega^2\, x(t)$

$\Rightarrow\ a = -\omega^2 A = -0{,}95\ m/s^2$

8) Recentemente un Airbus all' aeroporto di Linate ha dovuto abortire il decollo per evitare la collisione con un Cessna, quando la sua velocita' in pista era $v_o = 145$ km/h. Lo spazio di frenata e' stato d= 250 m. Calcolare l' accelerazione, assunta costante, impressa invertendo la spinta dei motori ed il tempo di frenata.

$v_f = v_0 - a t_f = 0 \quad \Rightarrow \quad t_f = v_0/a$

$d = v_0 t_f - a\, t_f^2/2 = v_o^2/a - v_o^2 / 2a = v_o^2/2a \Rightarrow a = v_o^2 / 2d = 3{,}2\ m/s^2$,

$t_f = v_0/a = 12{,}5$ s

9) Un disco di raggio R=0,5 m ruota con velocita' angolare $\omega(t) = At^2 + B$, con $A = 0{,}3\ rad/s^3$ e $B = 2$ rad/s. Un punto P sul bordo del disco ha la posizione iniziale $\theta_o=0$. Determinare :

i. la posizione angolare finale al tempo $t_f= 2s$:

$\theta (t) = \int w(t)dt = \int(At^2 + B)dt = At^3 /3 + Bt$

$\theta_f = \theta (t_f) = 4{,}8$ rad

ii. l' accelerazione normale e tangente alla traiettoria nello stesso istante:

$a_N = \omega^2 R = (At_f^2 + B)^2 R = 5{,}12\ m/s^2$,

$a_T= \alpha R = (2At_f) R = 0{,}6\ m/s^2$

dove l' accelerazione angolare e': $\alpha(t) = d\omega(t)/dt = 2 At$.

10) Un punto materiale parte dall' origine dell' asse x con velocita' iniziale $v_0=1$ m/s ed e' sottoposto ad un' accelerazione $a(x) = -k x$, con $k = 0{,}2\ s^{-2}$. Calcolare la distanza dall' origine alla quale il punto si ferma invertendo il suo moto:

Dalla definizione di accelerazione: $a = dv(x(t)) / dt = (dv(x)/dx)(dx/dt) = (dv/dx) v$

$\Rightarrow a(x)\, dx = v\, dv \Rightarrow \int a(x)\, dx = \int v\, dv$

Nel nostro caso, essendo $a(x) = -k x$:

$$\int_0^{xf} a(x)dx = -\int_0^{xf} kxdx = -\frac{1}{2}kx_f^2 = \int_{v0}^{0} vdv = -\frac{1}{2}v_0^2$$

$$\Rightarrow \quad x_f = v_0 / \sqrt{k} = 2{,}24m$$