Problemi e domande d'esame tratte dalle prove di accertamento in itinere degli anni precedenti

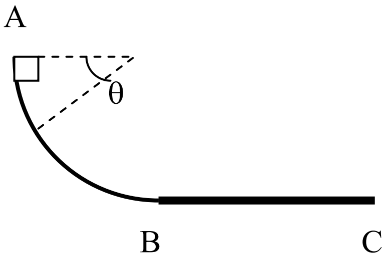
Problema 1

Un blocchetto di massa M=0,3 kg scivola per effetto della forza peso lungo una guida circolare AB priva di attrito e di raggio R = 0,2 m, posta in un piano verticale (vedi figura), partendo dal punto A con velocità iniziale nulla. Al termine della guida il blocchetto percorre un tratto orizzontale scabro BC, con coefficiente di attrito dinamico μ_D=0.2, di lunghezza d, fermandosi nel punto C. Determinare:

a) La velocità del blocchetto dopo aver percorso l'angolo θ=30° di figura e la reazione vincolare della guida in quel punto : v =......................., Φ =............

b) Il lavoro compiuto dalla forza d'attrito: W_{attr}=..........

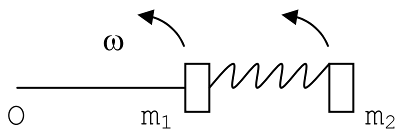
c) L' impulso trasferito dalla forza d'attrito al blocchetto: I_{attr}=.........



Problema 2

Due oggetti di masse m_1=0.2 Kg e m_2=0.1 Kg, collegati tra loro da una molla di costante elastica k=4 N/m e lunghezza a riposo X_0=0,3 m, sono tenuti in rotazione in un piano orizzontale con la stessa velocità angolare costante ω=2 rad/s intorno ad un asse verticale passante per il punto O di figura, tramite un filo inestensibile lungo L=0.5 m con un estremo fisso in O e l'altro estremo attaccato alla massa m_1. Calcolare: a) l' allungamento della molla : ΔX=.........

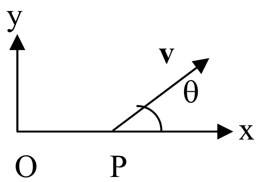
b) la tensione T del filo :



T =.........

1) Si scriva l' equazione che esprime il teorema di Kőnig del momento angolare per un sistema di punti materiali.

2) Un punto materiale di massa m=0,1 Kg in moto nel piano (x,y) passa per il punto P=(d,0.) con velocità v=5 m/s, in direzione inclinata di θ=30° rispetto all'asse x. Calcolare la distanza di P dall' origine O sapendo che il momento angolare del punto materiale vale L_o=0,125 Kg m^2/s.



d = ...

3) Si enunci il teorema del moto del centro di massa di un sistema di punti materiali.

4) Due sferette di dimensioni trascurabili e di massa m_1=0,1Kg e m_2 = 0,2 Kg sono collegate tra loro da una sbarretta di massa trascurabile e lunghezza d= 0,3 m.

a) calcolare la distanza di m_2 dal C.M. del sistema costituito dalle due sferette:

x_2 =........

b) sapendo che il CM si muove con velocità v_G=0,5 m/s e la sbarretta ruota con velocità angolare ω=3 rad/s intorno al CM, calcolare l' energia cinetica del sistema:

E_k=......

5) Per un sistema isolato di punti materiali:

O si conserva l' energia cinetica totale del sistema
O si conserva la quantità di moto totale
O si conservano sia la quantità di moto totale che l'energia cinetica totale

6) Si disegni il diagramma dell' energia per un moto armonico. Si determini l'energia meccanica e l'ampiezza di oscillazione di un oscillatore di massa m=0,2 Kg soggetto ad una forza elastica F(x)=-kx, che abbia una pulsazione ω=3 rad/s e che nella posizione x_1=0.4 m abbia velocita' v_1=2m/s.

E_M = ...
X_0 = ...

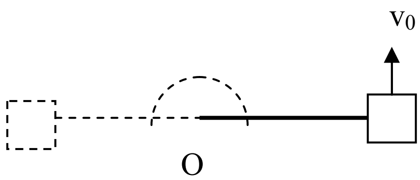
Problema 3

Un blocchetto di massa M=2 kg , attaccato all' estremo di un filo inestensibile di lunghezza ℓ=1,5 m, si muove con velocita' iniziale v_0=5 m/s su un piano scabro orizzontale lungo una circonferenza, nel cui centro O e' fissato l'altro estremo del filo. Il coefficiente di attrito dinamico tra piano e blocco e' μ_D=0.2.
Determinare:

d) Il lavoro compiuto dalla forza d'attrito quando il blocco ha compiuto la rotazione di un angolo $\theta = \pi$ rad: W_{attr} =..........

e) L' energia cinetica del blocchetto in quell' istante: E_k =.........

f) La tensione del filo nello stesso istante: T = ...

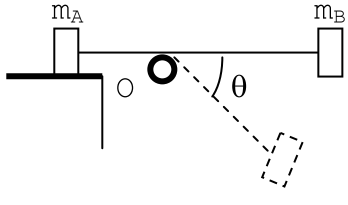


Problema 4

Due blocchetti A e B di masse rispettivamente m_A=9m_B ed m_B =0.5 Kg sono collegati tra loro da un filo insestensibile come in figura. Il blocco A poggia su un piano orizzontale scabro, con coefficiente di attrito statico μ_S=0.2. Inizialmente il filo e' teso ed orizzontale, ed il blocco B viene lasciato cadere con velocita' iniziale nulla sotto l' azione della forza peso. Il filo poggia inoltre sul perno O (vedi figura) a distanza ℓ = 1 m dal bocco B. Quando B raggiunge la posizione angolare θ= 30°, sapendo che il blocco A e' ancora fermo, determinare:

a) la velocita' del blocco B : v_B = ...
b) la tensione del filo ed il momento della forza peso rispetto ad O :
T =......... M_O = ...

Calcolare inoltre il massimo valore dell' angolo θ raggiunto dal blocco B prima che il blocco A inizi a muoversi: θ_{MAX} =



Problema 5:
Due sferette di masse m_1=1 Kg ed m_2=3 Kg, soggette alla forza peso, sono collegate tra loro da una sbarra di massa trascurabile lunga ℓ = 2 m. All' istante iniziale la posizione delle due sferette e' $(x_1,y_1) =(0,\ell)$ ed $(x_2,y_2) = (0,0)$ nel piano verticale di assi (x,y) di figura; il loro centro di massa C ha velocita' v_0=5 m/s diretta lungo l'asse orizzontale x ed il sistema e' in rotazione in senso antiorario con velocita' angolare ω=2 rad/s intorno a C (vedi figura).
Determinare:

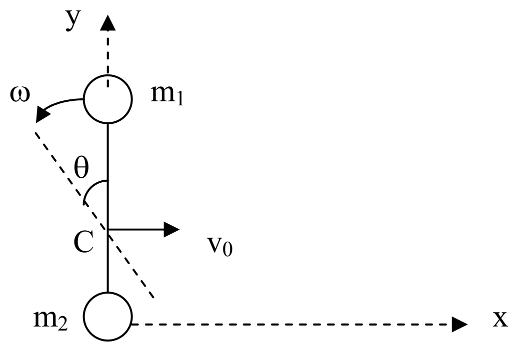
a) la posizione iniziale del centro di massa : (x_c, y_c) = ...
b) la quantita' di moto totale del sistema allo stesso istante ed il momento angolare del sistema calcolato rispetto al centro di massa: P = ...
L_C = ...

Si enunci il teorema del moto del centro di massa e si determini, assumendo g=10 m/s:
c) la posizione del centro di massa all' istante t_1 = 0,5 s : (x'_c, y'_c) =.........

g) Si dimostri che per la generica posizione angolare θ della sbarra il momento della forza peso rispetto a C e' nullo.

h) Si enunci il terorema del momento angolare, considerando i momenti rispetto al centro di massa C:

i) Si determini la velocita' angolare di rotazione all' istante t_1 : ω = ...



Soluzioni:

Problema 1

Un blocchetto di massa M=0,3 kg scivola per effetto della forza peso lungo una guida circolare AB priva di attrito e di raggio R = 0,2 m, posta in un piano verticale (vedi figura), partendo dal punto A con velocità iniziale nulla. Al termine della guida il blocchetto percorre un tratto orizzontale scabro BC, con coefficiente di attrito dinamico μ_D=0.2, di lunghezza d, fermandosi nel punto C. Determinare:

a) La velocità del blocchetto dopo aver percorso l'angolo θ=30° di figura e la reazione vincolare della guida in quel punto : v =......................, Φ =............

Conservazione dell' energia meccanica tra il punto iniziale A ed il punto P:
$mgR\sin\theta = mv^2/2 \quad \Rightarrow \quad v = [\,2gR\sin\theta]^{1/2} = 1{,}4$ m/s

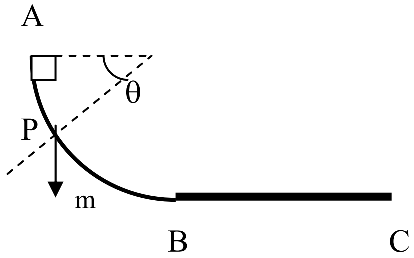
Proiettando la legge di Newton lungo la direzione radiale:
$$F - mgR\cos(\pi/2-\theta) = m\, a_N = mv^2/R \quad \Rightarrow \quad F = mg\sin\theta + mv^2/R = 4{,}41 \text{ N}$$

b) Il lavoro compiuto dalla forza d'attrito: W_{attr}=..........

Conservazione dell' energia nel tratto AB e teorema dell' energia cinetica nel tratto BC: $mgR = mv_B^2/2 = -W_{attr} = 0{,}588$ J

c) L' impulso trasferito dalla forza d'attrito al blocchetto: I_{attr}=........

Teorema dell' impulso: $I_{attr} = \Delta p = -mv_B = -0{,}59$ N s

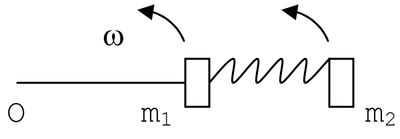


Problema 2

Due oggetti di masse m_1=0.2 Kg e m_2=0.1 Kg, collegati tra loro da una molla di costante elastica k=4 N/m e lunghezza a riposo X_0=0,3 m, sono tenuti in rotazione in un piano orizzontale con la stessa velocità angolare costante ω=2 rad/s intorno ad un asse verticale passante per il punto O di figura, tramite un filo inestensibile lungo L=0.5 m con un estremo fisso in O e l'altro estremo attaccato alla massa m_1. Calcolare: a) l' allungamento della molla :

legge di Newton per m_2: $m_2 a = m_2\omega^2(L + X_0 + \Delta X) = k\Delta X \quad \Rightarrow \quad \Delta X = 0{,}089$ m

b) la tensione T del filo :



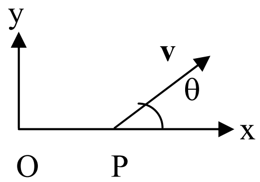
Legge di Newton per m_1 :

$T - k\Delta X = m_1\omega^2 L \quad \Rightarrow \quad T = 0{,}756$ N

1) Si scriva l' equazione che esprime il teorema di Kőnig del momento angolare per un sistema di punti materiali.

$$\mathbf{L}_o = \mathbf{L}_{CM} + \mathbf{L'}_G = \mathbf{r}_{CM} \times M\mathbf{v}_{CM} + \Sigma_i(\mathbf{r'}_i \times m_i\mathbf{v'}_i)$$

2) Un punto materiale di massa m=0,1 Kg in moto nel piano (x,y) passa per il punto P=(d,0.) con velocità v=5 m/s, in direzione inclinata di θ=30° rispetto all'asse x. Calcolare la distanza di P dall' origine O sapendo che il momento angolare del punto materiale vale L_o=0,125 Kg m^2/s.



$$d = Lo/mv\sin\theta = 0,5 \text{ m}$$

3) Si enunci il teorema del moto del centro di massa di un sistema di punti materiali.

$$\mathbf{R}^{(E)} = M\,\mathbf{a}_{CM}$$

4) Due sferette di dimensioni trascurabili e di massa m_1=0,1Kg e m_2 = 0,2 Kg sono collegate tra loro da una sbarretta di massa trascurabile e lunghezza d= 0,3 m.

a) calcolare la distanza di m_2 dal C.M. del sistema costituito dalle due sferette:

$$x_2 = m_1\, d / (m_1 + m_2) = 0,1 \text{ m}$$

b) sapendo che il CM si muove con velocità v_G=0,5 m/s e la sbarretta ruota con velocità angolare ω=3 rad/s intorno al CM, calcolare l' energia cinetica del sistema:

Teorema di Koenig dell' energia cinetica:

$$E_k = (m_1+m_2)v^2_G / 2 + m_2(x_2\omega)^2/2 + m_1(x_1\omega)^2/2 = 0,0645 \text{ J}$$

con $x_1 = d - x_2 = 0,2$ m

5) Per un sistema isolato di punti materiali:

si conserva l' energia cinetica totale del sistema

X si conserva la quantità di moto totale

si conservano sia la quantità di moto totale che l'energia cinetica totale

6) Si disegni il diagramma dell' energia per un moto armonico. Si determini l'energia meccanica e l'ampiezza di oscillazione di un oscillatore di massa m=0,2 Kg soggetto ad una forza elastica F(x)=-kx, che abbia una pulsazione ω=3 rad/s e che nella posizione x_1=0.4 m abbia velocita' v_1=2m/s.

La costante elastica della forza e' : $k = \omega^2 m = 1{,}8$ N/m
Allora l' energia meccanica totale e':
$$E_M = mv_1^2/2 + kx_1^2/2 = 0{,}54 \text{ J}$$
La conservazione dell' energia da': $kX_0^2/2 = E_M \Rightarrow X_0 = 0{,}77$ m

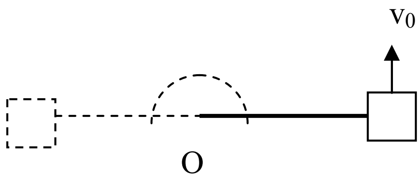
Problema 3

Un blocchetto di massa M=2 kg , attaccato all' estremo di un filo inestensibile di lunghezza ℓ=1,5 m, si muove con velocita' iniziale v_0=5 m/s su un piano scabro orizzontale lungo una circonferenza, nel cui centro O e' fissato l'altro estremo del filo. Il coefficiente di attrito dinamico tra piano e blocco e' μ_D=0.2.
Determinare:

a) Il lavoro compiuto dalla forza d'attrito quando il blocco ha compiuto la rotazione di un angolo $\theta = \pi$ rad:
$$W_{attr} = -\mu_D mg\, d = -18{,}5 \text{ J} \quad \text{con } d = \pi \ell = 4{,}71 \text{ m}$$

b) L' energia cinetica del blocchetto in quell' istante:
$$E_{k,f} = E_{k,i} + W_{attr} = mv_i^2/2 + W_{attr} = 6{,}54 \text{ J}$$

c) La tensione del filo nello stesso istante:
La velocita' finale e': $v_f = [2E_{k,f}/m]^{1/2} = 2{,}55$ m/s
$$\Rightarrow T = mv^2/\ell = 8{,}72 \text{ N}$$



Problema 4

Due blocchetti A e B di masse rispettivamente m_A=9m_B ed m_B =0.5 Kg sono collegati tra loro da un filo insestensibile come in figura. Il blocco A poggia su un piano orizzontale scabro, con coefficiente di attrito statico μ_S=0.2. Inizialmente il filo e' teso ed orizzontale, ed il blocco B viene lasciato cadere con velocita' iniziale nulla sotto l' azione della forza peso. Il filo poggia inoltre sul perno O (vedi figura) a distanza ℓ = 1 m dal bocco B. Quando B raggiunge la posizione angolare θ= 30°, sapendo che il blocco A e' ancora fermo, determinare:

a) la velocita' del blocco B :
conservazione dell' energia: $mg\,\ell\,\sin\theta = mv_B^2/2 \;\Rightarrow\; v_B$= 3,13 m/s

b) la tensione del filo ed il momento della forza peso rispetto ad O :

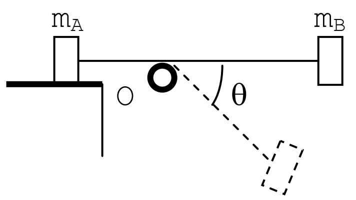
$$T = mv^2/\ell + mg\cos(\pi-\theta) = 7{,}35\text{ N}$$
$$M_O = mg\,\ell\cos\theta = 4{,}25\text{ N m}$$

Calcolare inoltre il massimo valore dell' angolo θ raggiunto dal blocco B prima che il blocco A inizi a muoversi: θ_{MAX} = ……

La massima tensione si ha all' angolo θ_{MAX} tale per cui:

$$T_{MAX} = mv^2/\ell + mg\cos(\pi-\theta_{MAX}) = mv^2/\ell + mg\sin\theta_{MAX} = 3\,mg\sin\theta_{MAX} =$$
$$= F_{attr,S}^{MAX} = \mu_S\,9mg$$

(essendo $v^2 = 2\,\ell g\sin\theta_{MAX}$ per la conservazione dell' energia)



$$\Rightarrow \sin\theta_{MAX} = 3\mu_S \quad\Rightarrow\quad \theta_{MAX} = 36{,}7°\,.$$

Problema 5:

Due sferette di masse m_1=1 Kg ed m_2=3 Kg, soggette alla forza peso, sono collegate tra loro da una sbarra di massa trascurabile lunga ℓ = 2 m. All' istante iniziale la posizione delle due sferette e' $(x_1,y_1) = (0,\ell)$ ed $(x_2,y_2) = (0,0)$ nel piano verticale di assi (x,y) di figura; il loro centro di massa C ha velocita' v_0=5 m/s diretta lungo l'asse orizzontale x ed il sistema e' in rotazione in senso antiorario con velocita' angolare ω=2 rad/s intorno a C (vedi figura).

Determinare:

a. la posizione iniziale del centro di massa : $(x_c, y_c) = (0, d)$
con $d = m_1\,\ell/(m_1+m_2) = 0{,}5$ m

b. la quantita' di moto totale del sistema allo stesso istante ed il momento angolare del sistema calcolato rispetto al centro di massa:
$P = (m_1+m_2)\,v_o = 20$ kg m/s
$L_C = m_1\omega\,(\ell - d)^2 + m_2\omega\,d^2 = 2{,}62$ N m s

Si enunci il teorema del moto del centro di massa e si determini, assumendo g=10 m/s:

$$\mathbf{R}^{(E)} = M\,\mathbf{a}_{CM} \Rightarrow (m_1+m_2)\,g = (m_1+m_2)\,\mathbf{a}_{CM} \Rightarrow \mathbf{a}_{CM} = g$$

c) la posizione del centro di massa all' istante $t_1 = 0{,}5$ s : (x'_c, y'_c) =..........

$$x'_c = v_o\,t_1 = 2{,}5 \text{ m} \qquad y'_c = d - g t_1^2/2 = -0{,}75 \text{ m}$$

d) Si dimostri che per la generica posizione angolare θ della sbarra il momento della forza peso rispetto a C e' nullo.

$$M^{peso}{}_C = m_1 g(\ell - d)\sin\theta - m_2 g d \sin\theta =$$
$$= g \sin\theta\,[m_1\ell - (m_1 + m_2)\,d\,] = 0$$

essendo $d = m_1\,\ell/(m_1+m_2)$ (vedi punto (a))

e) Si enunci il terorema del momento angolare, considerando i momenti rispetto al centro di massa C: $d\mathbf{L}_G/dt = M_G^{(E)}$

Nel nostro caso: $M_G^{(E)} = 0 \Rightarrow \mathbf{L}_G = \text{costante}$

f) Si determini la velocita' angolare di rotazione all' istante t_1 : ω = ...

$$\mathbf{L}_G = I_G\omega = \text{costante} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \text{costante} = 2 \text{ rad/s}$$

($I_G = m_1(\ell - d)^2 + m_2\,d^2 = 1{,}3125$ kg m^2 e' il momento d' inerzia del sistema rispetto al suo centro di massa G)