Urti e forze impulsive

"Urto": interazione che avviene in un tempo τ molto breve (al limite infinitesimo) tra corpi che esercitano mutuamente forze molto intense ("impulsive") tali da causare variazioni finite della quantità di moto dei corpi stessi nel tempo infinitesimo dell'interazione.

Nella trattazione degli urti (limitatamente al tempo dell'urto) le forze non impulsive (es.: forza peso, attriti, qualsiasi forza la cui intensità rimane finita nel tempo dell'urto) sono trascurabili: esse esercitano un impulso nullo durante il tempo infinitesimo dell'urto, e quindi è nullo il loro contributo alla variazione della quantità di moto totale del sistema di corpi che si urtano.

In generale, tra l'istante finale ed iniziale di un urto:

quantità di moto totale del sistema

impulso della risultante delle forze esterne agenti sul sistema

$$\Delta \vec{P} \equiv \vec{P}_f - \vec{P}_i = \int_i^f \frac{d\vec{P}}{dt}\,dt = \int_{t_i}^{t_i+\tau} \vec{R}^{(E)}(t)\,dt \equiv \vec{I}^{(E)}$$

$$\Delta \vec{L}_O = \int_i^f \frac{d\vec{L}_O}{dt}\,dt = \int_{t_i}^{t_i+\tau} \vec{M}^{(E)}(t)\,dt$$

impulso del momento delle forze esterne

momento angolare totale del sistema

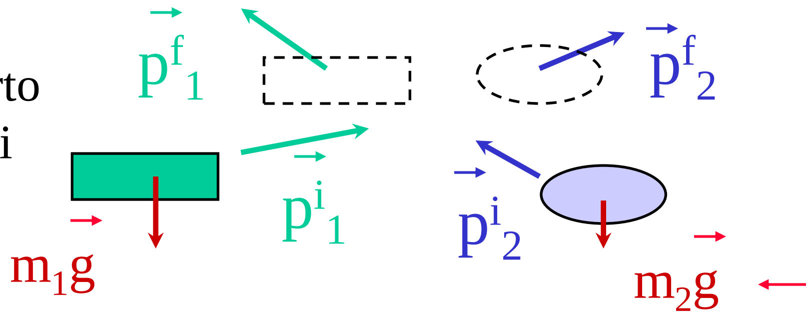
Teoremi di conservazione

Se il sistema è isolato oppure su di esso non agiscono forze esterne impulsive :

$$(\vec{I}^{(E)} \equiv 0) \qquad \boxed{\Delta \vec{P} = 0}$$

la quantità di moto totale del sistema si conserva

Esempio: urto tra due punti materiali



$$\vec{P}_f \equiv \vec{p}_{f_1} + \vec{p}_{f_2} =$$
$$= \vec{P}_i \equiv \vec{p}_{i_1} + \vec{p}_{i_2} =$$

forza esterna non impulsiva

Se il sistema è isolato oppure su di esso non agiscono forze esterne impulsive oppure agiscono forze esterne impulsive con momento nullo rispetto ad un polo O :

$$(\vec{M}^{(E)} \equiv 0) \qquad \boxed{\Delta \vec{L}_O = 0}$$

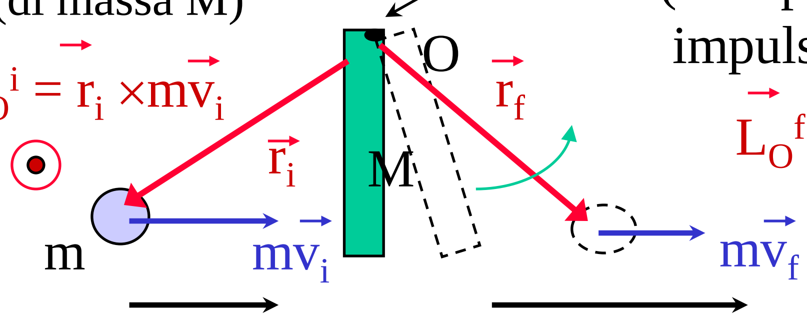
il momento angolare totale si conserva

Esempio: urto tra un punto materiale m ed un asta vincolata (di massa M)

vincolo (sviluppa una forza in O impulsiva)

$\vec{L}_O^i = \vec{r}_i \times m\vec{v}_i$

(vettore uscente dal piano del foglio)



$\vec{L}_O^f = \vec{r}_f \times m\vec{v}_f + \vec{L}_{asta}$

$$\vec{L}_{O_f} = \vec{L}_{O_i}$$

$$\vec{P}_i = m\vec{v}_i \neq \vec{P}_f = m\vec{v}_f + M\vec{v}_{CM}$$

Urto elastico ed anelastico

"Urto elastico" ≡ urto nel quale l'energia cinetica totale si conserva :

$$\boxed{E_{k_f} = E_{k_i}}$$

(il lavoro compiuto dalle forze interne al sistema è nullo:
l'energia potenziale delle forze interne non varia tra prima e dopo l'urto
$\Rightarrow$ non vi sono state nell'urto deformazioni permanenti della struttura interna dei corpi che hanno interagito)

"Urto anelastico" : si ha una perdita di energia cinetica

$$\boxed{E_{k_f} < E_{k_i}}$$

(le forze interne al sistema compiono un lavoro:
i corpi rimangono permanentemente deformati con un aumento della loro energia potenziale interna e/o della loro temperatura)

Se due corpi rimangono attaccati a seguito dell'urto, si ha un "urto completamente anelastico", nel quale la perdita di energia cinetica è massima

Urto elastico unidimensionale

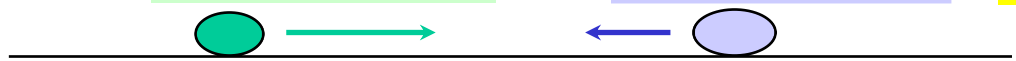
Esempio: urto tra due punti materiali

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{P}_i &= \vec{P}_f \\ E_{k_i} &= E_{k_f} \end{aligned}}$$

$\vec{P}^{\,i} = \vec{p}_1^{\,i} + \vec{p}_2^{\,i}$

$\vec{p}_1^{\,i} = m_1 \vec{v}_1^{\,i}$ $\quad$ $\vec{p}_2^{\,i} = m_2 \vec{v}_2^{\,i}$

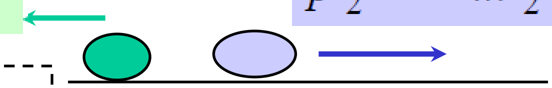
prima dell'urto



$\vec{P}^{\,f} = \vec{p}_1^{\,f} + \vec{p}_2^{\,f}$

$\vec{p}_1^{\,f} = m_1 \vec{v}_1^{\,f}$ $\quad$ $\vec{p}_2^{\,f} = m_2 \vec{v}_2^{\,f}$

dopo dell'urto



$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i})$$

$$m_1 (v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2 (v_{2f}^2 - v_{2i}^2)$$

$$(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f})$$

$$\Rightarrow \quad v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$$

$$v_{2f} = v_{1i} + v_{1f} - v_{2i}$$

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i}) = m_2 (v_{1i} + v_{1f} - 2 v_{2i})$$

$$\Rightarrow \quad v_{1i} (m_1 - m_2) = v_{1f} (m_1 + m_2) - 2 m_2 v_{2i}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_{1f} = v_{1i} \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} + \frac{2 m_2}{(m_1 + m_2)} v_{2i}}$$

e analogamente:

$$\boxed{v_{2f} = \frac{2 m_1}{(m_1 + m_2)} v_{1i} + \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)} v_{2i}}$$

Urto elastico unidimensionale nel sistema del CM:

$$E'_{k_i} = E'_{k_f}$$

prima dell'urto

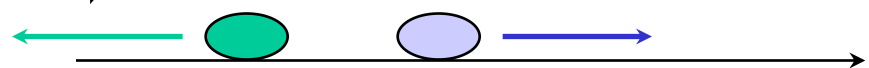
$$\vec{P}'_i = \vec{p}'_{1i} + \vec{p}'_{2i} = 0$$

$$\vec{p}'_{1i} = m_1 \vec{v}'_{1i} \equiv \vec{p}'_i = -m_2 \vec{v}'_{2i}$$

dopo l'urto

$$\vec{P}'_f = \vec{p}'_{1f} + \vec{p}'_{2f} = 0$$

$$\vec{p}'_{1f} = m_1 \vec{v}'_{1f} \equiv \vec{p}'_f = -m_2 \vec{v}'_{2f}$$



$$\frac{p'^2_i}{2m_1} + \frac{p'^2_i}{2m_2} = \frac{p'^2_f}{2m_1} + \frac{p'^2_f}{2m_2}$$

$$p'^2_i \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = p'^2_f \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$$

$$\Rightarrow \quad p'_f \equiv m_1 v'_{1f} = -p'_i \equiv -m_1 v'_{1i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v'_{1f} = -v'_{1i}}$$

e analogamente : $\boxed{v'_{2f} = -v'_{2i}}$

nel sistema del CM le velocità restano invariate in modulo, invertendo la loro direzione

Dalle trasformazioni delle velocità (moti relativi):

$$v_{1f} = v'_{1f} + v_{CM} = -v'_{1i} + v_{CM} = -(v_{1i} - v_{CM}) + v_{CM} = -v_{1i} + 2v_{CM}$$

$$\Rightarrow \quad v_{1f} = -v_{1i} + 2\frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} = v_{1i}\frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} + \frac{2m_2}{(m_1 + m_2)} v_{2i}$$

come già trovato.

Urto elastico unidimensionale : esempi

In un urto elastico unidimensionale:

$$v_{1f} = v_{1i}\frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} + \frac{2m_2}{(m_1 + m_2)}v_{2i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)}v_{1i} + \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)}v_{2i}$$

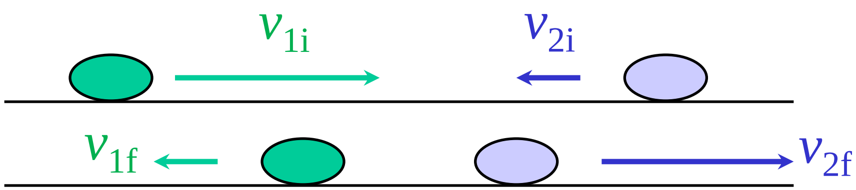
Alcuni casi particolari :

i) $m_1 = m_2$

“scambio delle velocità”:

$\Rightarrow$

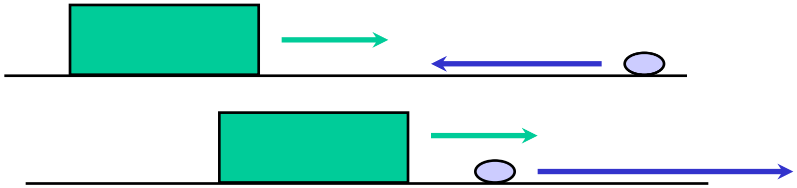
$$v_{1f} = v_{2i}$$
$$v_{2f} = v_{1i}$$



ii) $m_1 >> m_2$

$\Rightarrow$

$$v_{1f} \cong v_{1i}$$
$$v_{2f} \cong 2v_{1i} - v_{2i}$$



il corpo 1 (di massa maggiore) mantiene pressochè invariata la sua velocità,
il corpo 2 rimbalza indietro

iii) $m_1 << m_2$ e $v_{2i} = 0$

(es.: urto contro un ostacolo fisso: $m_2 = M_{Terra}$)

$\Rightarrow$

$$v_{1f} \cong -v_{1i}$$
$$v_{2f} \cong 0$$

il corpo 1 rimbalza indietro; il corpo 2 rimane pressochè fermo

Urto elastico tra due punti materiali nello spazio :

Le 4 equazioni di conservazione di energia e quantità di moto :

$$E_{1i} + E_{2i} = E_{1f} + E_{2f}$$

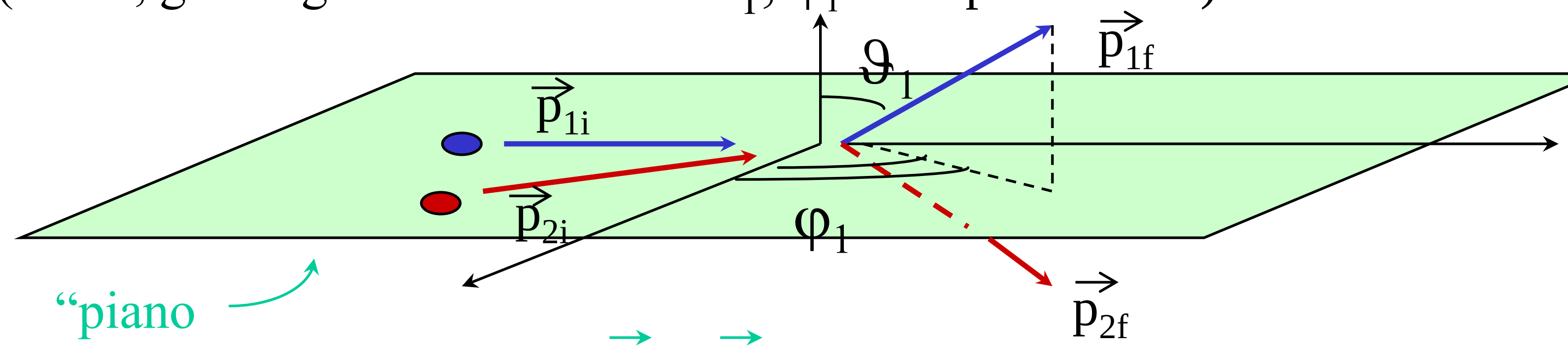
$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \longrightarrow \begin{cases} p_{1i_x} + p_{2i_x} = p_{1f_x} + p_{2f_x} \\ p_{1i_y} + p_{2i_y} = p_{1f_y} + p_{2f_y} \\ p_{1i_z} + p_{2i_z} = p_{1f_z} + p_{2f_z} \end{cases}$$

non sono sufficienti a determinare univocamente, noto lo stato iniziale (ossia noti $\vec{p}_{1i}$ e $\vec{p}_{2i}$), lo stato finale , descritto da 6 incognite :

$$\vec{p}_{1f} = (p_{1f_x}, p_{1f_y}, p_{1f_z})$$

$$\vec{p}_{2f} = (p_{2f_x}, p_{2f_y}, p_{2f_z})$$

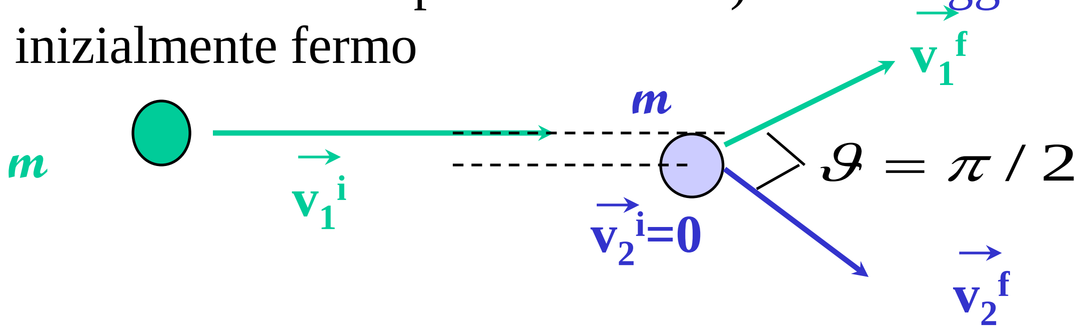
Lo stato finale è univocamente determinato se vengono misurati due parametri finali (ad es., gli "angoli di diffusione" ϑ_1, φ_1 della particella 1)



"piano dell'urto" (individuato da $\vec{p}_{1i}$, $\vec{p}_{2i}$)

Esempio:

urto elastico (non centrale: l'urto non avviene lungo la linea congiungente i due centri dei corpi in collisione) tra due oggetti di egual massa m, uno dei quali inizialmente fermo



Conservazione dell'energia e dell'impulso:

$$\begin{aligned} \vec{p}_{1i} &= \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \\ E_{1i} &= E_{1f} + E_{2f} \end{aligned} \longrightarrow \frac{p_{1i}^2}{2m} = \frac{p_{1f}^2}{2m} + \frac{p_{2f}^2}{2m}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} p_{1i}^2 &= p_{1f}^2 + p_{2f}^2 + 2\,\vec{p}_{1f} \cdot \vec{p}_{2f} \\ p_{1i}^2 &= p_{1f}^2 + p_{2f}^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{p}_{1f} \cdot \vec{p}_{2f} = 0}$$

$\Rightarrow$ l'angolo tra le due velocità finali è di 90°.

(cio' è vero per velocità non relativistiche, per le quali vale la relazione della meccanica classica : $E = p^2 / 2m$
L'analoga relazione relativistica : $E = \sqrt{p^2 + m^2c^4}$
predice un angolo minore, sperimentalmente osservato in urti elastici di protoni di alta energia su nuclei di idrogeno)

Urto elastico tra due particelle relativistiche

Immagine di un fascio di protoni ad altissime energie ($v \cong c$) incidente su una "camera a bolle" riempita di idrogeno liquido :

urto elastico tra un protone del fascio incidente e un nucleo di idrogeno (velocita' del bersaglio $\cong 0$)

p

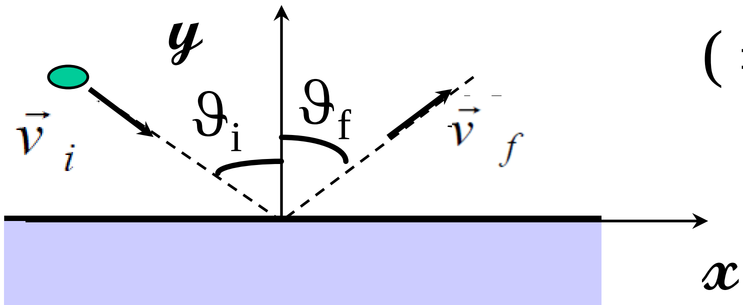
l' angolo tra i due protoni uscenti dall' urto e'

$\theta < \pi/2$

in accordo con la teoria relativistica

(nota: la visualizzazione delle tracce e' dovuta alla formazione di bollicine lungo il percorso delle particelle ionizzanti (i protoni), ottenuta grazie alla rapida espansione della camera, innescata attraverso un opportuno meccanismo di "trigger" al passaggio del fascio di protoni incidente)

Urto elastico obliquo contro una parete :



$$(\Rightarrow \quad \vec{v}_{2i} = \vec{v}_{2f} = 0 \quad)$$

$$p_{i_x} = p_{f_x}$$

(lungo l'asse *x* la parete non esercita forze impulsive)

Conservazione dell' energia cinetica: $E_i = E_f \longrightarrow \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m v_f^2 \longrightarrow \boxed{v_i = v_f}$

$$\Rightarrow \quad v_i \sin\vartheta_i = v_f \sin\vartheta_f \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vartheta_i = \vartheta_f}$$

l'angolo di incidenza è uguale all'angolo di rimbalzo ("riflessione")

Questa osservazione, confrontata con la legge delle riflessione dei raggi luminosi, portò Newton a formulare l'ipotesi della "natura corpuscolare" della luce

Urto completamente anelastico:

I due corpi che entrano in collisione rimangono attaccati:

$$\vec{v}_{1f} = \vec{v}_{2f} \equiv \vec{v}_{CM} = \frac{m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i}}{m_1 + m_2}$$

Se non agiscono forze esterne impulsive, la velocità del CM rimane invariata:

$$\vec{P}^{tot} = (m_1 + m_2)\vec{v}_{CM} = \text{costante}$$

L'energia cinetica finale è minore di quella iniziale :

$$E_{k_f} = \frac{1}{2} m_1 v_{1_f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2_f}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{CM}^2$$

$$E_{k_i} = \frac{1}{2} m_1 v_{1_i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2_i}^2 = E'_{k_i} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{CM}^2 > E_{k_f}$$

teorema di Koenig

$$= \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1_i} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2_i} > 0$$

La perdita di energia cinetica (dissipata in calore e/o energia potenziale di deformazione dei corpi) è uguale all' energia cinetica associata al moto dei due corpi nell' istante iniziale relativo al CM :

$$-\Delta E_k \equiv E_{k_i} - E_{k_f} = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1_i} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2_i}$$

"Coefficiente di restituzione"

Un generico urto anelastico viene caratterizzato da un "coefficiente di restituzione" e , definito in termini delle quantità di moto (o, equivalentemente, delle energie cinetiche) iniziali e finali nel sistema del CM :

$$\boxed{e \equiv \frac{p'_{1f}}{p'_{1i}} = \frac{p'_{2f}}{p'_{2i}}}$$

quantità di moto finale nel CM

quantità di moto iniziale nel CM

(si ricordi che nel CM : $\vec{p}\,'_{1i} = -\vec{p}\,'_{2i}$, $\vec{p}\,'_{1f} = -\vec{p}\,'_{2f}$)

In un urto elastico: $\vec{p}\,'_{1f} = -\vec{p}\,'_{1i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{e = 1}$

In un urto completamente anelastico:

$$\vec{p}\,'_{1f} = \vec{p}\,'_{2f} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{e = 0}$$

In generale: $\boxed{0 \le e \le 1}$

Inoltre:

$$E'_{kf} = \frac{p'^2_{1f}}{2m_1} + \frac{p'^2_{2f}}{2m_2} \equiv \frac{e^2 p'^2_{1i}}{2m_1} + \frac{e^2 p'^2_{2i}}{2m_2}$$

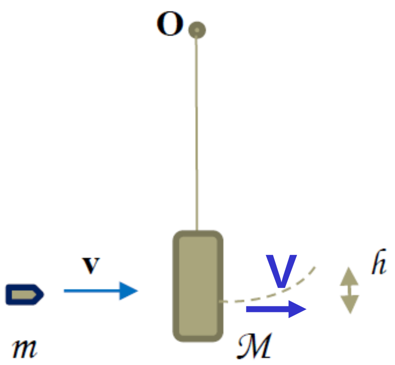
$$= e^2\left(\frac{p'^2_{1i}}{2m_1} + \frac{p'^2_{2i}}{2m_2}\right)$$

$$= E'_{ki}$$

$$\boxed{E'_{kf} \equiv e^2 E'_{ki}}$$

Esempio: pendolo balistico

Un proiettile di massa m=40 gr e velocità incognita **v** diretta orizzontalmente impatta contro un oggetto massivo M >> m appeso tramite un filo ad un punto fisso O . Il proiettile rimane conficcato nell'oggetto, il quale per il contraccolpo inizia a muoversi come un pendolo in un piano verticale, sotto l'azione della forza peso; la massima altezza raggiunta è h=5 cm rispetto alla sua posizione iniziale.



Determinare la velocità iniziale del proiettile, supponendo M= 2 kg.

Conservazione della quantità di moto totale: $m\,\mathrm{v} = (m + M)\,V$

Nel moto dopo l'urto:

$$E_{k,in} = (m + M)V^2/2 = E_{M,f} = E_{p,f} = (m+M)gh \;\rightarrow\; V=(2gh)^{1/2} = 0{,}99 \text{ m/s}$$

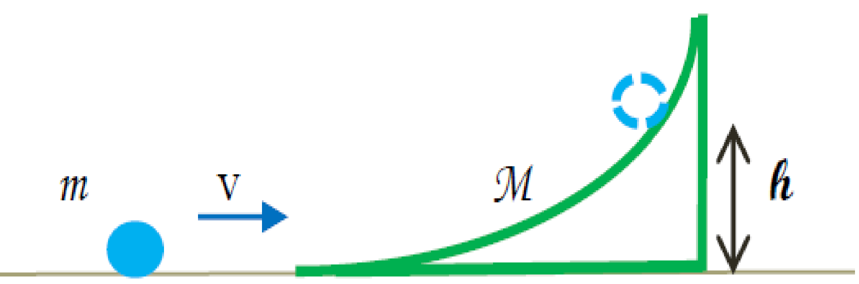
$$\mathrm{v} = (1 + M/m)\,(2gh)^{1/2} = 50{,}5 \text{ m/s}$$

[Urto completamente anelastico:

$\rightarrow$ perdita di energia cinetica : $\Delta E_k = (m + M)\,V^2/2 - mv^2/2 = -50$ J

essendo $E_{k,i} = mv^2/2 = 51$ J, $E_{k,f} = (m + M)\,V^2/2 = 1$ J]

Esercizio



Una pallina di massa $m = 0{,}02$ kg in moto con velocità v=3 m/s su un piano orizzontale incontra una rampa di massa $M = 0{,}2$ kg che può muoversi anch'essa senza attrito lungo il piano. La rampa è inizialmente ferma.

Determinare la massima altezza raggiunta dalla pallina sulla rampa.

Conserv.quantità di moto totale:

$$m\mathrm{v} = (m+\mathcal{M})\,\mathrm{V} \quad \rightarrow \quad \mathrm{V} = m\mathrm{v} \,/\, (\,m+\mathcal{M}\,) = 0{,}273 \text{ m/s}$$

Conserv. energia meccanica:

$$m\mathrm{v}^2/2 = (m+\mathcal{M})\,\mathrm{V}^2/2 + mgh \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = 4{,}2 \text{ cm}}$$

[nota: l'energia cinetica non si è conservata: "urto" completamente anelastico]

Successivamente, la pallina ridiscende sotto l' azione della forza peso.

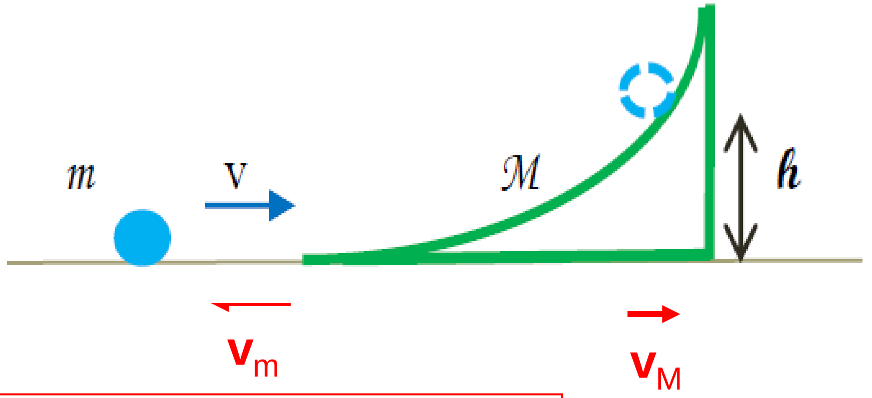
Determinare le velocità finali v_m e V_M della pallina e della rampa.

Tra gli istanti iniziale e finale: "urto" elastico

Conserv.quantità di moto totale: $m\mathrm{v} = m\mathrm{v}_m + \mathcal{M}\,\mathrm{v}_M$

Conserv.energia cinetica: $m\mathrm{v}^2/2 = m\mathrm{v}_m{}^2/2 + \mathcal{M}\,\mathrm{v}_M{}^2/2$

Esercizio (continua)



Soluzione:
caso particolare della soluzione generale:

$$v_{1,f} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1,i} + 2m_2 v_{2,i}}{m_1 + m_2}$$

$$v_{2,f} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2,i} + 2m_1 v_{1,i}}{m_1 + m_2}$$

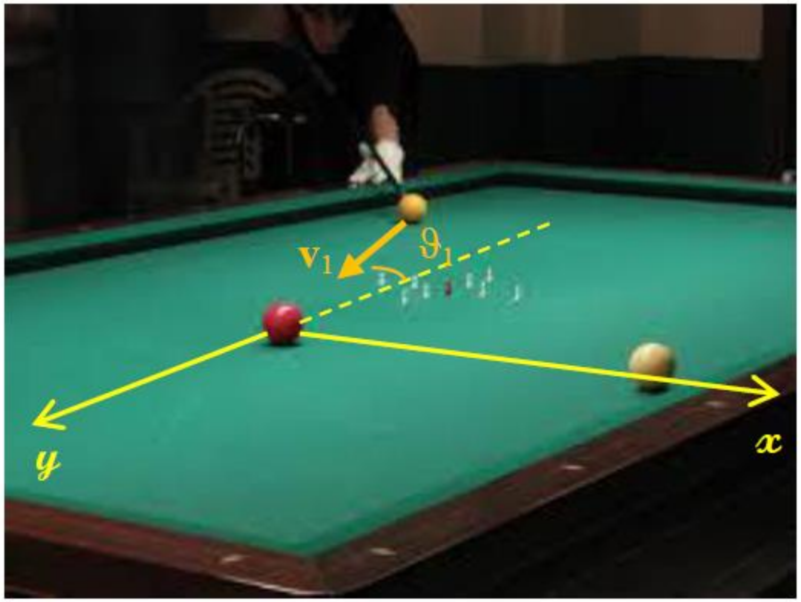
con $m_1 \equiv m$, $\mathrm{v}_{1,i} = \mathrm{V}$, $m_2 \equiv \mathcal{M}$, $\mathrm{v}_{2,i} = 0$

$\Rightarrow$

$\mathrm{v}_m \equiv \mathrm{v}_{1,f} = \mathrm{v}\,(m - \mathcal{M}\,) / (m + \mathcal{M}\,) = -\,2{,}45$ m/s

$\mathrm{v}_M \equiv \mathrm{v}_{2,f} = 2\,m\mathrm{v}\;/\,(m + \mathcal{M}\,) = 0{,}55$ m/s

Esercizio



Due palle da biliardo di egual massa *m* si urtano in un piano orizzontale. La palla arancione prima dell'urto procedendo con velocità $v_1^{in}=2$ m/s lungo la direzione che forma l'angolo $\vartheta_1=30°$ con l' asse y, urta elasticamente la palla rossa, di egual massa m, inizialmente ferma. Si osserva che dopo l'urto la palla rossa procede con velocità $\mathbf{v}_2^{fin}$ diretta lungo l'asse x di figura.

Determinare le velocità finali

$\mathbf{v}_1^{fin} = (v_{1x}^{fin}, v_{1y}^{fin})$

$\mathbf{v}_2^{fin} = (v_{2x}^{fin}, 0)$.

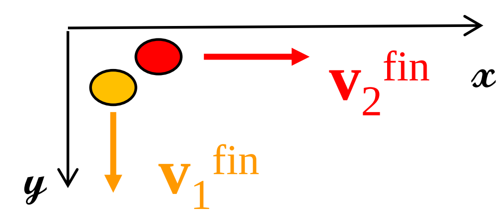
$$\begin{cases} v_{1x,i} = v_{1,i}cos\vartheta_1 = v_{1x,f} + v_{2,f} \\ v_{1y,i} = v_{1,i}sin\vartheta_1 = v_{1y,f} \\ v_{1,i}^2 = v_{1,f}^2 + v_{2,f}^2 = v_{1x,f}^2 + v_{1y,f}^2 + v_{2,f}^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_{1,i}^2 = (v_{1,i}cos\vartheta_1 - v_{2,f})^2 + v_{1,i}^2 sin^2\vartheta_1 + v_{2,f}^2 =$$

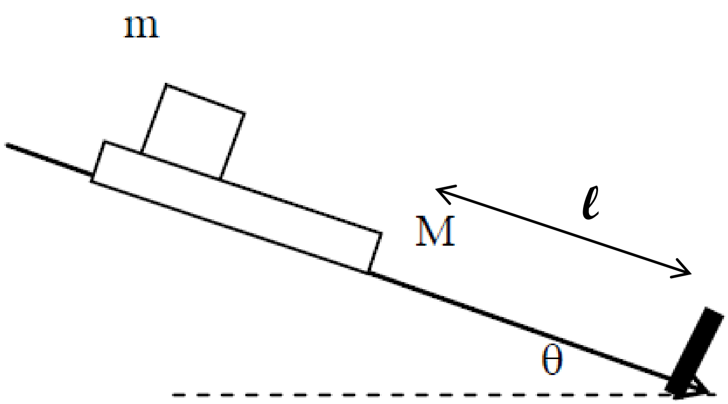
$$= v_{1,i}^2(cos^2\vartheta_1 + sin^2\vartheta_1) + 2v_{2,f}^2 - 2v_{1,i}cos\vartheta_1 v_{2,f}$$

$$\Rightarrow 0 = 2v_{2,f}^2 - 2v_{1,i}cos\vartheta_1 v_{2,f} \Rightarrow \boxed{v_{2,f} = v_{1,i}cos\vartheta_1}$$

$\Rightarrow$ Dalla 1ª equazione: $\boxed{v_{1x,f} = 0}$



Esercizio



Un blocco di massa m=0,5 kg e' posto su un secondo blocco di massa M = 2 kg, che scivola su un piano inclinato scabro, con coefficiente di attrito dinamico $\mu_D = 0{,}2$. Il piano è inclinato di $\theta = 20°$. Tra i due blocchi, che scendono insieme con la stessa velocità, vi è un coefficiente d' attrito statico μ_S. I due blocchi partono con velocita' iniziale nulla; dopo aver percorso un tratto di lunghezza ℓ= 3 m , il blocco inferiore M urta in maniera completamente anelastica un ostacolo.

Determinare l' accelerazione dei due blocchi ed il minimo valore di μ_S affinché il moto descritto si verifichi.

Determinare l' impulso trasferito all' ostacolo nell' urto, l' energia dissipata e l' energia cinetica finale del blocco m

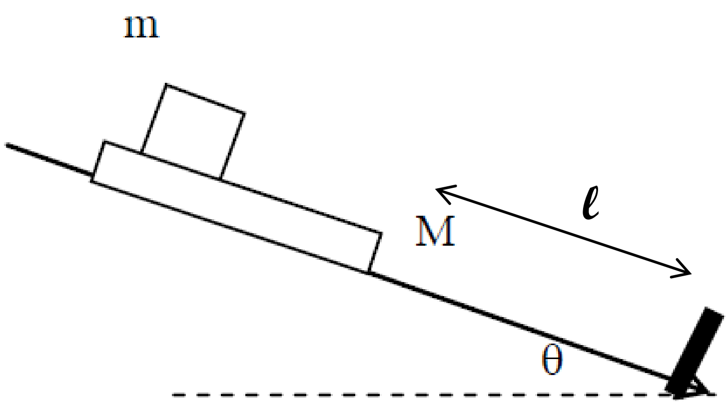
$$(m + M)a = R^{(E)} = (m + M)\, g \sin\theta - \mu_D (m + M)\, g \cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad a = g(\sin\theta - \mu_D \cos\theta) = 1{,}51 \text{ m/s}^2$$

Legge di Newton per m: $\quad ma = mg\sin\theta - F_{att}$

$$\Rightarrow \quad F_{att} = mg\sin\theta - ma = m\,\mu_D g\cos\theta < F_{att}^{MAX} = \mu_S\, m\, g\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \mu_S > \mu_D$$

Esercizio (continua)



Determinare l' impulso trasferito all' ostacolo nell' urto, l' energia dissipata e l' energia cinetica finale del blocco m

Moto uniformemente accelerato; velocità finale v= $(2a\,\ell)^{1/2}$ = 3 m/s

Nell'urto, la massa m continua a procedere con la stessa velocità (su di essa non si esercitano forze impulsive): $v_m^{fin} = v$, $v_M^{fin} = 0$

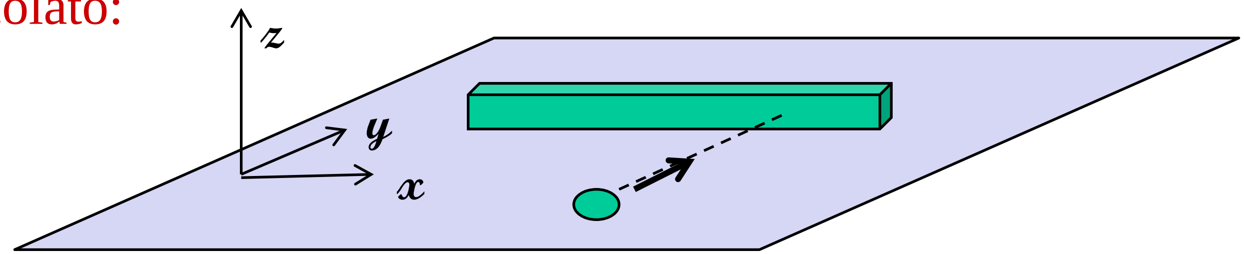
Impulso trasferito all'ostacolo:

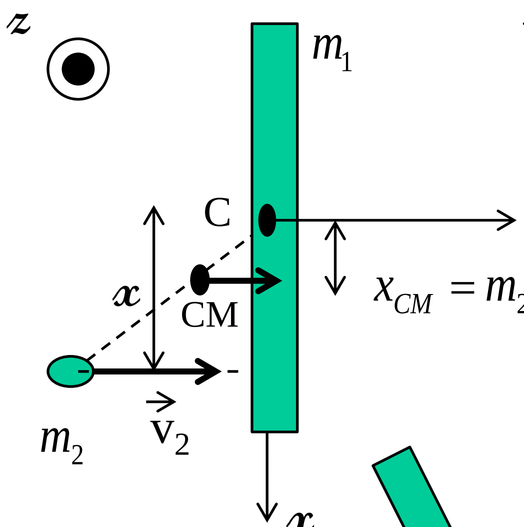
$$I = -I_M = -\Delta P = P_M^{in} - P_M^{fin} = M\,v = 6\ \mathrm{N\cdot s}$$

$E_{diss} = Mv^2/2 = 9$ J, $E^{kin}_m = mv^2/2 = 2.3$ J

Esempio: urto completamente anelastico tra un punto materiale e un corpo rigido (asta)

I) Sistema **non** vincolato:





$$x_{CM} = m_2 x/(m_1+m_2)$$

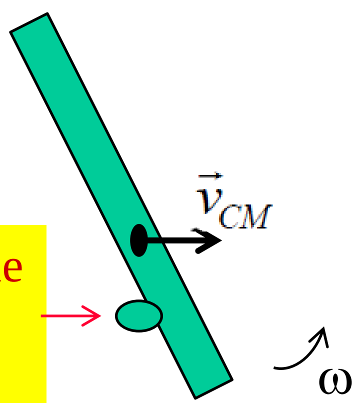
$$\vec{R}^{(E)} = 0 \qquad \vec{P} = \text{costante} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_{CM} = \vec{v}^{\,i}_{CM} = m_2\vec{v}_2/(m_1+m_2)}$$

$$\vec{M}^{(E)}_{CM} = 0 \qquad \vec{L}_{CM} = \text{costante}$$

$$\Rightarrow \quad L^i_{CMz} = m_2 v_2 (x - x_{CM}) = L^f_{CMz} = \mathrm{I}_{tot}\,\omega$$

dove: $$I_{tot} = I^{asta}_{CM} + m_2(x-x_{CM})^2$$

$$I^{asta}_{CM} = I^{asta}_{C} + m_1 x^2_{CM} = m_1\ell^2/12 + m_1 x^2_{CM}$$

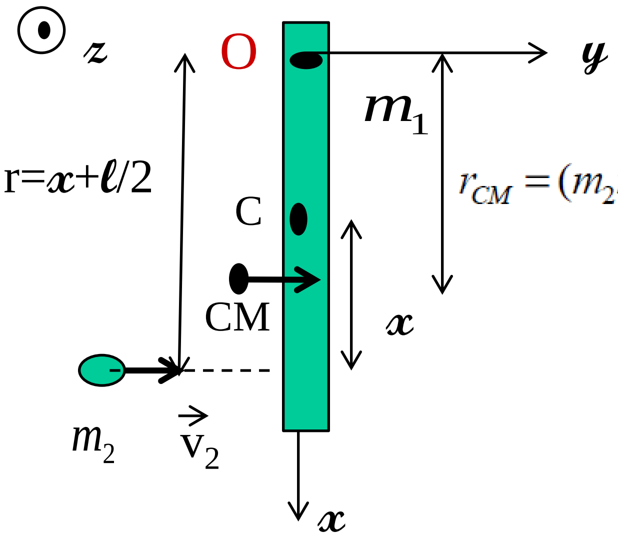


Il punto materiale rimane attaccato all'asta

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega = m_2 v_2 (x-x_{CM})/\mathrm{I}_{tot}}$$

Esempio: urto vincolato completamente anelastico

II) Sistema vincolato in O:



$\vec{M}_O^{(E)} = 0 \quad \vec{L}_O = \text{costante}$

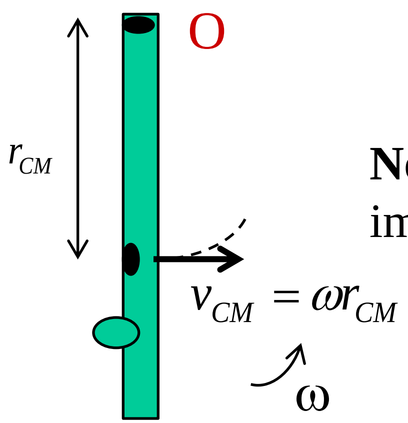
$\Rightarrow \quad L^i_{Oz} = m_2 v_2 r = L^f_{Oz} = \mathrm{I}_{\text{tot}}\,\omega$

dove: $I_{tot} = I_O^{asta} + m_2 r^2 = m_1 \ell^2/3 + m_2 r^2$

$\Rightarrow \quad \boxed{\omega = m_2 v_2 \mathrm{r}/\mathrm{I}_{\text{tot}}}$

La quantita' di moto totale **non** si conserva:

$$\boxed{\vec{P}^f = (m_1 + m_2)\,\vec{v}^f_{CM} = (m_1 + m_2)\,\omega r_{CM}\,\vec{u}_y \neq \vec{P}^i = m_2 \vec{v}_2}$$



Nel vincolo si sviluppa una **forza impulsiva**, che durante l'urto imprime al sistema un impulso:

$$\boxed{\vec{J} = \Delta\vec{P} = \vec{P}^f - \vec{P}^i = (m_1 + m_2)\,\omega r_{CM}\,\vec{u}_y - m_2 \vec{v}_2}$$