

Fisica Generale 1 - Dinamica dei sistemi e del corpo rigido

Matteo Ferraretto

2 maggio 2018

Esercizi introduttivi: prima degli esercizi veri e propri è bene familiarizzare con alcuni nuovi concetti (centro di massa, momento di una forza, momento angolare, momento di inerzia ecc...).

1. Trovare il centro di massa di una lamina quadrata di lato $2R$ con un buco circolare di raggio R e centro situato su una diagonale a distanza $R\sqrt{2}/2$ dal centro del quadrato.
2. Trovare il centro di massa di un cilindro di raggio R e altezza h costituito da due pezzi cilindrici di raggio R e altezza $h/2$ aventi rispettivamente densità ρ_1 e ρ_2 . Determinare inoltre il momento di inerzia di questo oggetto rispetto all'asse del cilindro.
3. Calcolare il centro di massa di un sistema pianeta-satellite di masse rispettivamente M_1 e M_2 , aventi forma sferica di raggio R_1 e R_2 con i centri a distanza d . Calcolare inoltre il momento di inerzia del sistema rispetto ad un asse passante per il centro di massa e ortogonale alla congiungente dei centri. Approssimare il risultato nel limite $d \gg R_2 \gg R_1$ e $M_1 \gg M_2$.

Esercizio 1

Una tavola di massa $m_1 = 10kg$ e lunghezza $d = 1.5m$ comprime di $\Delta x = 31cm$ contro una parete verticale una molla ideale di costante elastica $k = 150N/m$. Due blocchetti di spessore trascurabile rispetto a d e massa $m_2 = m_3 = 0.8kg$ si trovano all'estremo della tavola opposto alla molla. Il coefficiente di attrito dinamico tra il corpo 2 e la tavola è $\mu_2 = 0.2$, mentre tra il corpo 3 e la tavola è $\mu_3 = 0.3$; tra la tavola e il pavimento invece l'attrito è trascurabile. Calcolare, tenendo conto che la molla cessa di agire sul sistema quando raggiunge la lunghezza di riposo:

- l'accelerazione iniziale del centro di massa;
- l'accelerazione iniziale della tavola;
- l'accelerazione iniziale dei blocchetti;
- il modulo della forza di contatto tra i blocchetti;
- l'energia cinetica del sistema quando i blocchetti cadono.

[Fonte 2, esercizio 3.7]

Esercizio 2 - Momenti

Marco ($35kg$) e Davide ($30kg$) giocano su un dondolo di lunghezza $4m$ e vogliono stare in equilibrio con il dondolo ad un angolo di $\theta = 10^\circ$ rispetto alla posizione orizzontale, con Marco più in alto di Davide. Se Marco si siede a metà della sua sezione di dondolo, in che posizione dovrà sedersi Davide? Improvvisamente Davide si sposta a $50cm$ dal perno: sapendo che il perno centrale è a $60cm$ da terra, qual è la velocità angolare con cui il dondolo tocca terra?

Esercizio 3 - Momenti

Calcolare la velocità massima e l'angolo di piega con cui una moto può percorrere una curva di raggio $R = 120m$, sapendo che il grip (coefficiente di attrito statico tra pneumatici e asfalto) è $\mu = 1.1$. Discutere come cambia la soluzione se la pista presenta un banking positivo/negativo (inclinazione verso l'interno/esterno della curva) di angolo $\alpha = 15^\circ$.

Esercizio 4 - Momenti

Un astronauta di massa $m = 80\text{kg}$ è legato con una fune ideale di lunghezza 10m ad un supporto centrale attorno al quale sta ruotando mantenendo testa e piedi allineati in direzione radiale. Egli compie mezzo giro in 6s , quindi si stacca dalla fune. Sapendo che il suo momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il centro di massa e uscente dai fianchi è $I = 39.2\text{kgm}^2$, calcolare la posizione dell'astronauta e l'angolo di rotazione dopo 7s dal distacco. A questo punto l'astronauta si rannicchia su se stesso, riducendo il momento d'inerzia I del 10%; calcolare dopo quanto tempo sarà orientato come all'istante del distacco e il lavoro compiuto dall'astronauta per ridurre il proprio momento d'inerzia.

Discutere la conservazione del momento angolare scegliendo come polo prima il centro di massa e poi il centro di rotazione.

Esercizio 5 - Corpo rigido

Due corpi di massa $m_1 = 3\text{kg}$ e $m_2 = 5\text{kg}$ sono collegati tra loro tramite una fune ideale passante per una carrucola circolare di massa $M = 2\text{kg}$ e raggio $R = 20\text{cm}$, libera di ruotare attorno al proprio asse. Determinare l'accelerazione delle masse e quanto tempo impiega la carrucola per compiere il primo giro completo attorno all'asse. Quale forza deve sopportare il perno centrale a cui è vincolata la carrucola per sorreggere il sistema?

[Fonte 3, esercizio 45 (con modifiche)]

Esercizio 6 - Corpo rigido

Una disco di massa $M = 40\text{kg}$ e raggio $R = 2\text{m}$ è posizionato orizzontalmente ed è libero di ruotare attorno al proprio asse, che però è fissato. Su di esso vi è un altro disco di massa $m = 8\text{kg}$ e raggio $r = 0.6\text{m}$, il cui asse si trova a distanza $d = 1.2\text{m}$ dall'asse del disco grande. Anche questo disco è libero di ruotare attorno al proprio asse. Inizialmente il disco piccolo ruota con velocità angolare $\omega = 14\text{rad/s}$, mentre il disco grande è fermo; ma a causa di attrito radente tra i due dischi, alla fine il disco piccolo smette di ruotare rispetto a quello grande. Calcolare:

- la velocità angolare finale del sistema rispetto all'asse centrale;
- la variazione di energia cinetica del sistema;

Supponendo ora che entrambi i dischi siano inizialmente fermi e che non vi sia attrito tra loro, calcolare il lavoro che occorre compiere sul sistema per portarlo ad avere una velocità angolare $\Omega = 6\text{rad/s}$ rispetto all'asse centrale.

[Fonte 3, esercizio 47]

Esercizio 7 - Corpo rigido

Una piattaforma circolare di raggio 70cm posizionata orizzontalmente è vincolata a ruotare attorno al proprio asse centrale (rispetto al quale il momento d'inerzia è 1.5kgm^2) e presenta una scanalatura orizzontale lungo un diametro. Al centro della piattaforma è attaccata una molla di costante elastica 600N/m e lunghezza a riposo trascurabile, alla cui estremità è collegato un punto materiale di massa 400g . All'istante iniziale la piattaforma è ferma e il punto materiale è bloccato all'estremità della stessa. Viene applicato all'asse un motore che esercita un momento costante 2Nm . Determinare all'istante t_1 in cui la piattaforma ha compiuto 88 giri:

- l'accelerazione angolare del sistema;
- la velocità angolare del sistema;
- le componenti della reazione vincolare sul punto materiale.

A questo punto il motore viene staccato e la massa si sblocca. Determinare all'istante t_2 in cui la molla torna a riposo:

- la velocità angolare della piattaforma;
- la velocità del punto materiale.
- le componenti della reazione vincolare sul punto materiale.

[Fonte 2 - esercizio 5.15]

Esercizio 8 - Rotolamento

Un disco, un anello e una sfera di massa $m = 1\text{kg}$ e raggio $R = 5\text{cm}$ vengono fatti rotolare dalla sommità di un piano inclinato scabro di angolo $\theta = 30^\circ$ (altezza 30cm). Determinare il coefficiente d'attrito statico minimo che garantisce il puro rotolamento di tutti e tre gli oggetti e i tempi di caduta dei corpi.

Esercizio 9 - Rotolamento

Una ruota di massa $m = 8\text{kg}$ e raggio $R = 50\text{cm}$ è inizialmente ferma su un piano orizzontale di coefficiente d'attrito statico $\mu = 1.0$. Un motore

applica sulla ruota un momento M e la mette in moto. Calcolare il valore massimo di M affinché il moto sia di puro rotolamento, e quindi vi sia la massima accelerazione possibile. Calcolare infine tale accelerazione.

Supponendo ora che la strada sia inclinata con angolo di $\theta = 20^\circ$, calcolare il range di valori di M che permette alla ruota di salire in condizioni di puro rotolamento.

Supporre ora che $M = M_{max}$. Improvvisamente la ruota incontra un tratto ghiacciato e perde grip (supporre $\mu = 0$ per semplicità): calcolare l'accelerazione del centro di massa e l'accelerazione angolare.

Esercizio 10 - Rotolamento

Un corpo di massa $m_1 = 3kg$ è collegato tramite una fune inestensibile e una carrucola ad un disco pieno omogeneo di massa $m_2 = 10kg$, che scende lungo un piano inclinato di $\theta = 30^\circ$. Il corpo 1 è anche collegato ad una molla di costante elastica $k = 100N/m$ fissata al pavimento e inizialmente a riposo. Il sistema viene lasciato libero di muoversi e si osserva che il disco scende con moto di puro rotolamento. Calcolare le seguenti quantità quando la molla è allungata di $\Delta l = 10cm$:

- accelerazione del disco;
- spostamento del centro di massa del sistema;
- velocità del centro di massa del disco.

[Fonte 2, esercizio 5.21]

Esercizio 11 - Rotolamento

Una biglia di raggio $1cm$ cade da un'altezza di $2m$ lungo una guida inclinata scabra e compie un moto di puro rotolamento. Al termine del piano inclinato vi è una guida a forma di arco di circonferenza di ampiezza angolare $\pi/6$ e raggio $2m$ rivolta verso l'alto e lungo la quale la pallina continua a rotolare. Determinare se la pallina si stacca o meno dalla guida e, in caso affermativo, la velocità con cui si stacca e l'altezza massima raggiunta nel moto susseguente.

Esercizio 12 - Rotolamento

Una palla da bowling di massa $10kg$ viene lanciata sulla pista, con cui vi è attrito dinamico di coefficiente $\mu_d = 0.08$. La palla viene lanciata inizialmente con solo moto traslazionale di velocità $4m/s$. Determinare dopo

quanto tempo ha inizio il moto di puro rotolamento e l'energia dissipata dall'attrito.

Esercizio 13 - Rotolamento

All'asse di un cilindro di massa $m_1 = 3\text{kg}$ e raggio $R = 20\text{cm}$ è collegata un'asta rigida di massa $m_2 = 1\text{kg}$ e lunghezza $L = 1\text{m}$. All'asse del cilindro viene applicata una forza $F = 20\text{N}$ in direzione orizzontale dalla parte opposta rispetto a dove si trova l'asta e il cilindro comincia a muoversi con moto di puro rotolamento. Considerando che tra l'asta e il suolo c'è attrito dinamico di coefficiente $\mu = 0.2$, determinare il modulo della forza che l'asta esercita sul cilindro e l'accelerazione del centro del cilindro. Determinare inoltre la forza di attrito statico agente sul cilindro.

[Fonte 4, esercizio 9.11]

Soluzione 1: $a_{CM} = 4.01m/s^2$; $a_1 = 4.26m/s^2$; $a_2 = a_3 = 2.45m/s^2$;
 $R = 0.4N$; $E_c = 1.3J$.

Soluzione 2: $R_D = 1.17m$; $\omega = 5.48rad/s$.

Soluzione 3: banking nullo: $v_{max} = 129.5km/h$, $\theta = 48^\circ$; banking positivo: $v_{max} = 172km/h$, $\theta = 48^\circ$ (rispetto alla direzione ortogonale alla pista); banking negativo: $v_{max} = 99km/h$, $\theta = 48^\circ$ (rispetto alla direzione ortogonale alla pista).

Soluzione 4: L'astronauta percorre $37m$ e ruota di 210° . Dopo che si è rannicchiato, passano $4.5s$ prima che completi il giro.

Soluzione 5: $2.18m/s^2$; $1.1s$; $94N$.

Soluzione 6: $0.22rad/s$; $-138.9J$; $1647.4J$.

Soluzione 7: $\alpha = 1.18rad/s^2$; $\omega(t_1) = 36.1rad/s$; $\vec{N}(t_1) = -55.1\hat{e}_r + 0.3\hat{e}_t + 3.9\hat{e}_z$ (valori dati in Newton); $\omega(t_2) = 40.8rad/s$; $v(t_2) = 4.3m/s$; $\vec{N}(t_2) = 3.9\vec{e}_z$.

Soluzione 8: Disco $\mu = 0.19$, $t = 1.98s$; Anello $\mu = 0.29$, $t = 1.72$; Sfera $\mu = 0.16$, $t = 2.05s$.

Soluzione 9: In orizzontale $0 < M < 58.9Nm$; in pendenza $13.4Nm < M < 97.2Nm$. Sul ghiaccio $\alpha = 97.2rad/s^2$; $a = -26.8m/s^2$.

Soluzione 10: $a = 0.53m/s^2$; $\Delta x_{CM} = 6.7cm$, $\Delta y_{CM} = -1.5cm$; $v = 0.4m/s$.

Soluzione 11: $v = 4.9m/s$; $h = 60cm$.

Soluzione 12: $1.5s$; $23J$.

Soluzione 13: $5.18N$; $3.32m/s^2$; $4.98N$.

[Fonte 1: Ahmad A. Kamal, *1000 solved problems in classical physics*]

[Fonte 2: Zotto, Lo Russo, *Problemi di fisica generale, Meccanica - Termodinamica*]

[Fonte 3: Mazzoldi, Nigro, Voci, *Fisica Volume 1, Meccanica - Termodinamica*]

[Fonte 4: Zotto, Lo Russo, *Fisica Generale: Meccanica e Termodinamica*]